TARTU ÜLIKOOL

LOODUS- JA TÄPPISTEADUSTE VALDKOND

Matemaatika ja statistika instituut

Finants- ja kindlustusmatemaatika eriala

Risto Korb

Optsioonide hindamine binoommeetodiga konstantse elastsusega dispersiooni korral

Magistritöö (30 EAP)

Juhendaja Toomas Raus

TARTU 2020

Optsioonide hindamine binoommeetodiga konstantse elastsusega dispersiooni korral

Magistritöö

Risto Korb

Lühikokkuvõte. Optsioon on tuletisinstrument, mis annab selle omanikul õiguse, kuid mitte kohustuse, sooritada finantsvaraga tehing kokkulepitud hinnaga ja koguses. Käesolevas töös vaadeldakse kahte binoommeetodit optsiooni hindamiseks, eeldusel, et alusvara tulususe dispersioon on konstantse elastsusega ehk alusvara käitumine allub CEV protsessile. Nendeks on Nelson, Ramaswamy (N-R) ning Choe, Chu, Shini (CCS) binoommmeetodid. Mõlema meetodi puhul hinnatakse Euroopa optsioone ning võrreldakse saadud tulemusi analüütiliselt tõese väärtusega. Lisaks pakutakse välja paar modifikatsiooni CCS meetodile, mis aitab Euroopa ning Ameerika optsioone täpsemini hinnata. Töös on toodud programmid N-R, CCS meetodite ning selle modifikatsioonide rakendamiseks.

CERCS teaduseriala: P160 Statistika, operatsioonanalüüs, programmeerimine, finants- ja kindlustusmatemaatika.

Märksõnad: tuletisväärtpaberid, optsioonid, finantsmatemaatika.

Pricing options with binomial method in case of constant elasticity of variance

Master's Thesis

Risto Korb

Abstract. Option is a contract which gives its owner a right, but not the obligation, to buy or sell an underlying asset at a specified price and amount. In this thesis we consider two binomial methods to price options in case of constant elasticity of variance (CEV) model. These are Nelson, Ramaswamy (N-R) and Choe, Chu, Shin's (CCS) binomial models. In both cases the price of European option is calculated and compared to the analytical solution. In addition, two modifications are suggested to the CCS model, so it would more accurately price European and American options. This thesis contains programs to implement N-R, CCS methods and its modifications.

CERCS research specialization: P160 Statistics, operation research, programming, actuarial mathematics.

Keywords: derivative instruments, options, financial mathematics.

Sisukord

Sissejuhatus

Optsioon on tuletisinstrument, mis annab selle omanikule õiguse, kuid mitte kohustuse, sooritada kindlaks määratud finantsvaraga tehing tulevikus eelnevalt kokkulepitud hinna ja kogusega. Et tehing oleks õiglane ning puuduks võimalus teenida riskivabalt tulu rohkem, kui seda võimaldab riskivaba intress vara hoiustades (ehk puuduks arbitraaži võimalus), on vaja optsiooni hind õigesti määrata. 1973. aastal tutvustasid Fischer Black ja Myron Scholes (ning Robert Merton) osatuletistega diferentsiaalvõrrandit, mis kirjeldas lihtsalt ära Euroopa optsiooni hinna käitumise ning võimaldas luua kergelt rakendatava valemi Euroopa optsioonide hinna arvutamiseks [1]. Loomulikult teeb iga matemaatiline mudel lihtsuse saavutamiseks eeldusi ning üldistusi. Black-Scholes eelduste puhul on üks kõige problemaatilisem alusvara tulususe konstantne dispersioon.

Pärast 1987. aastal toimunud majanduslangust märgati alusvara tulususe dispersiooni juures harjumuspäratut käitumist, mida kutsutakse volatiilsuse naeratuseks. Nimelt märgati, et eeldatav dispersioon pole enam konstantne, vaid sõltub optsiooni lepingus kokkulepitud alusvara müügi- või ostuhinnast. [7]

Tegemist ei olnud erandliku nähtusega ning täpsem optsiooni hindamine vajas uuendatud mudelit, mis võimaldab dispersioonil ka ajas muutuda. Üks sobilik alternatiiv on 1975. aastal John Coxi poolt välja töötatud konstantse elastsusega dispersiooni (CEV) mudel.

Kui soovime hinnata optsiooni, kus optsiooni ostja tohib oma õigust kasutada vaid optsiooni kestvuse lõpus (Euroopa optsioon), siis nende hindamiseks omab Black-Scholesi diferentsiaalvõrrand analüütilist lahendit nii alusvara tulususe konstantse dispersiooni kui ka CEV protsessi korral. Küll aga puudub analüütiline valem keerulisemat tüüpi optsioonide hindamiseks. Selleks on näiteks populaarne Ameerika optsioon, kus optsiooni ostja võib oma õigust kasutada mistahes hetkel alates optsiooni ostmisest kuni selle kehtivuse lõpuni. Sellise optsiooni hindamiseks on sobilik kasutada numbrilist meetodit, millest kõige populaarsemad on näiteks Monte-Carlo meetod, lõplik diferentsmeetod ja binoommeetod. Nendest kolmest võrdlemisi lihtne ning vähe arvutusi nõudev meetod on binoommeetod. [7]

Käesolevas töös vaadeldakse CEV mudeli eeldustel kahte binoommeetodit, kuidas optsioone hinnata. Esimene neist on 1990. aastal Daniel B. Nelsoni ja Krishna Ramaswamy poolt kirjeldatud binoommeetod ning teine on 2014. aastal Hi Jun Choe, Jeong Ho Chu ja So Jeong Shini poolt välja pakutud binoommeetod.

Töö esimeses peatükis anname ülevaate optsioonidega seotud mõistetest. Toome välja Black-Scholesi diferentsiaalvõrrandi, mille lahendiks on optsiooni hind. Toome välja alusvara tulususe konstantse volatiilsusega kaasneva probleemi, mida praktikas tuntakse kui volatiilsuse naeratus. Esitame aluvara hinna käitumise protsessi CEV mudeli korral, mis aitab kirjeldada volatiilsuse naeratust.

Töö teises osas selgitame, mis on binoommeetod ning kuidas selle abil hinnata Euroopa ning Ameerika tüüpi optsiooni tulususe konstantse dispersiooni eeldusel. Kirjeldame, miks olemasolev binoommeetod tulususe mittekonstantse dispersiooni korral ei tööta. Kirjeldame kahte kirjanduses välja pakutud meetodit, kuidas binoommeetodit muuta, et see kehtiks CEV mudeli korral. Nendeks on Nelson-Ramaswamy binoommeetodit ning Choe-Chu-Shini binoommeetodi optsioonide hindamiseks.

Töö kolmandas osas võrdleme Nelson-Ramaswamy ning Choe-Chu-Shini binoommeetodi poolt saadud optsiooni hindu analüütiliselt täpse väärtusega ning vaatleme nende koondumisi analüütiliseks väärtuseks. Pakume välja paar modifikatsiooni, mis muudab Choe-Chu-Shini meetodi täpsemaks. Vaatame, kui hästi hindavad Nelson-Ramaswamy ning Choe-Chu-Shini modifitseeritud binoommeetod Ameerika optsioone, võttes võrdlusesse ka kirjandusest pärit lõpliku diferentsmeetodi kaudu saadud hinnad.

1. Optsioonid. Black-Scholesi diferentsiaalvõrrand.

Antud peatüki kirjutamisel on põhiliselt kasutatud õpikuid [5], [7] ja [9] ning loengukonspekte [8] ja [11]. Muudele allikatele on viidatud tekstisiseselt.

1.1. Optsioonid

Optsioon on leping, mis annab selle omanikule ehk optsiooni ostjale õiguse tulevikus kindlal ajahetkel või ajavahemikus sooritada tehing optsiooni müüjaga kokkulepitud alusvaraga kindlaks määratud hinna ja kogusega. Kõige levinum alusvara on aktsia, kuid selleks võib olla ükskõik milline finantsvara või kaup.

Optsioone iseloomustavad järgmised mõisted:

Alusvara alghind $\boldsymbol{S_0}$ – hind, mida alusvara omab optsiooni alguses ehk selle ostmisel.

Täitmishind $\boldsymbol{E}$ – hind, millega tulevikus kokkulepitud ajal optsiooni omanik saab alusvara osta või müüa;

Täitmisaeg $\boldsymbol{T}$ – aeg, mille jooksul saab optsiooni ostja oma õigust rakendada. Pärast optsiooni täitmisaega on optsioon kehtetu.

Optsioon algab koheselt pärast selle ostmist ning kestab kuni optsiooni ostja rakendab oma õigust või kuni täitmisaja lõpuni.

Kuigi optsioonide erinevaid tüüpe on väga palju, keskendume käesolevas töös vaid kahele populaarsemale, milleks on Ameerika ja Euroopa tüüpi optsioonid. Kui optsiooni kaudu saadud õigust tohib optsiooni omanik rakendada vaid selle täitmisajal, siis nimetatakse optsiooni **Euroopa tüüpi optsiooniks** (edaspidi Euroopa optsioon). Kui optsiooni kaudu saadud õigust tohib optsiooni omanik rakendada suvalisel ajal optsiooni kehtivuse algusest aegumiskuupäevani, siis nimetatakse optsiooni **Ameerika tüüpi optsiooniks** (edaspidi Ameerika optsioon).

Sõltuvalt optsiooni tehinguliigist võib optsioone liigitada ostuoptsiooniks ning müügioptsiooniks. **Ostuoptsioon** (*call*) on optsiooniliik, mis annab optsiooni ostjale õiguse osta alusvara. **Müügioptsioon** (*put*) on optsiooniliik, mis annab optsiooni ostjale õiguse müüa alusvara.

Optsioonilt teenitud tulu väljendab **väljamaksefunktsioon** $\boldsymbol{P(S)}$, mis sõltub optsiooni tüübist ning liigist.

Euroopa tüüpi optsiooni väljamaksefunktsioon on ostuoptsiooni puhul

$$P(S_T) = \max\{S_T - E; 0\}$$

ning müügioptsiooni puhul

$$P(S_T) = \max\{E - S_T; 0\},$$

kus T on optsiooni täitmisaeg ning S_T alusvara hind ajahetkel $t = T$.

Ameerika tüüpi optsiooni väljamaksefunktsioon on sarnane, kuid kuna optsioonilt tulenevat õigust saab rakendada suvalisel hetkel $t \in [0; T]$, siis on see ostuoptsiooni puhul

$$P(S_t) = \max\{S_t - E; 0\}$$

ning müügioptsiooni korral

$$P(S_t) = \max\{E - S_t; 0\}.$$

Kuna optsiooni kaudu saadud õigust ei ole optsiooni ostja kohustatud kasutama, on optsiooni kaudu teenitud tulu alati mittenegatiivne, mida väljendavad ka eelnevalt toodud väljamaksefunktsioonid. Seega kaasneb optsiooni lepinguga **Optsiooni hind** $\boldsymbol{V}$, mis on tasu, mille maksab optsiooni ostja optsiooni müüjale ning mis sõltub alusvara hinna käitumisest ning muudest teguritest.

1.2. Alusvara hinna käitumine

Et optsiooni õiglaselt hinnata, tuleb teha eeldused alusvara hinna käitumise kohta.

Ütleme, et muutuja käitumine on stohhastiline protsess, kui tema väärtus muutub ajas ebakindlal viisil. Võib eeldada, et alusvara hinna muutumine on stohhastiline protsess.

Markovi protsess on stohhastiline protsess, kus muutuja tuleviku väärtused sõltuvad vaid tema hetkväärtusest. Eugene Fama efektiivse turu hüpoteesi põhjal kajastab vara hind täielikult kogu kättesaadavat informatsiooni [6]. Järelikult alusvara hinna ajalugu vaadates ei saa uut informatsiooni ning alusvara hinna parima prognoosi saab vaadates vaid alusvara viimasest väärtusest. Eeldame, et alusvara allub Markovi protsessile.

Definitsioon. Wieneri protsess $\{W(t)|\ t \geq 0\}$ on stohhastiline protsess (täpsemalt Markovi protsess) , mille puhul

a) $W(0) = 0$ tõenäosusega 1;

b) Wieneri protsessi mittelõikuvad juurdekasvud on sõltumatud, s.t. $W(t+u) - W(t)$ ja $W(s+v) - W(s)$ on sõltumatud, kui $[t; t+u] \cap [s, s+v] = \emptyset$;

c) Wieneri protsessi juurdekasvud $W(t+u) - W(t)$ on normaaljaotusega, keskväärtusega μt ja dispersiooniga $\sigma^2 u$;

d) Wieneri protsess $W(t)$ on pidev aja t järgi tõenäosusega 1.

Wieneri protsess on standardne, kui $\mu = 0$ ja $\sigma = 1$. [11, lk. 82]

Definitsioon. Itô protsess $X(t)$ on stohhastiline protsess, mille puhul kehtib

$$dX(t) = \mu(X,t)dt + \sigma(X,t)dW(t), \tag{1}$$

kus $\mu(X,t)$ ja $\sigma(X,t)$ on pidevad funktsioonid ning $W(t)$ on standardne Wieneri protsess. [7, lk. 222]

Eeldame järgnevalt, et alusvara hinna $S(t)$ liikumist kirjeldav stohhastiline protsess on Itô protsess kujul

$$dS(t) = \mu(S,t)\ dt + \sigma(S,t)\ dW(t), \tag{2}$$

kus $\mu(S,t)$ on triiv, $\sigma(S,t)$ on alusvara volatiilsus ja $W(t)$ on eelnevalt defineeritud standardne Wieneri protsess.

Kui vaadelda triivi konstandina, siis sõltub tootlus $dS(t)/S(t)$ alusvara hinnast ajal t. Meie aga eeldame, et protsentuaalne tootlus on konstantne sõltumata alusvara hinnast. Selleks valime triiviks $\mu(S,t) = \mu S(t)$ mingi konstantse parameetri μ korral.

1.3. Black-Scholesi diferentsiaalvõrrand

Black-Scholesi diferentsiaalvõrrandi tuletamiseks teeme järgnevad eeldused alusvara käitumise kohta:

1) alusvara hind käitub vastavalt valemile

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma(S,t)dW(t); \tag{3}$$

2) alusvara on lubatud laenata, seda koheselt maha müüa ning tagasi osta, kui selle hinda on langenud, kusjuures teenitud tulu võib täies ulatuses kasutada;
3) puuduvad igasugused kulud (maksud, teenustasud) alusvarasid müües või ostes, iga alusvara võib mistahes koguses vabalt osta ja müüa;
4) alusvaralt ei maksta dividende;
5) puudub arbitraaži võimalus;
6) alusvara ost ja müük toimub ajas pidevalt;
7) riskivaba intressimäär r on konstantne sõltumata optsiooni kestvusest.

Black ja Scholes vaatasid alusvara hinna käitumise asemel alusvara tulususe $\frac{dS(t)}{S(t)}$ käitumist kujul

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sigma dW(t) \tag{4}$$

ehk alusvara volatiilsust kirjeldav funktsioon on $\sigma(S,t) = \sigma S(t)$. Paneme tähele Black ja Scholes vaatlesid alusvara tulususe volatiilsust konstantsena ning seda kirjeldab parameeter σ. Edaspidi, kui räägime konstantsest (või mittekonstantsest) volatiilsusest, peame silmas valemis (4) olevat tulususe konstantset volatiilsust. Black-Scholesi diferentsiaalvõrrandit tuletades aga jääme valemi (3) juurde, sest tuletuskäik ei sõltu alusvara volatiilsuse funktsioonist.

Portfell on investori varade kogum. Investor võib oma portfelli uuendada oma vara müües ja tulu arvelt uut vara soetada, võib portfelli suurendada investeerides ning võib vara müües portfelli vähendada. [1]

Vaatleme portfelli, mis koosneb kahest varast: riskivaba vara, mida saab hoiustada või laenata riskimäära intressiga r, ning optsiooni alusvara.

Isefinantseeriv portfell on portfell, mille väärtus muutub vaid intressilt saadud tulult ning kus alusvaradega seotud tehinguteks ei saada finantseeringut väljaspool portfelli ega võeta portfellist raha välja. Isefinantseeriva portfelli $\Pi(S,t)$ väärtuse muutust ajavahemikus dt saab kirjutada valemiga

$$d\Pi(S,t) = r\big(\Pi(S,t) - \eta(t)S(t)\big)dt + \eta(t)dS(t), \tag{5}$$

kus $\eta(t)$ vastab ajahetkel t portfellis sisaldava alusvara kogusele, mille ühe ühiku väärtus on $S(t)$.

Kui eeldada arbitraaži võimaluse puudumist, siis kehtib järgmine lemma.

Lemma. Kui isefinantseeriv portfell toodab täpselt sama koguse raha kui optsiooni omamine, siis portfelli väärtus ja optsiooni väärtus ajahetkel $t = 0$ on võrdsed. [8, lk. 9]

Eeldame, et eelnevas lemmas kirjeldatud portfell väärtusega $\Pi(S,t)$ on olemas, ehk

$$\Pi(S,t) = V(S,t). \tag{6}$$

Itô lemma. Omagu funktsioon $f(y,t)$ pidevaid osatuletisi $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ ning $\frac{\partial f}{\partial t}$. Olgu $Y = Y(t)$ Itô protsess kujul (1). Stohhastilist protsessi $f(y,t)$ kirjeldab diferentsiaalvõrrand

$$\begin{aligned} df(Y,t) = {} & \left[\frac{\partial f}{\partial t}(Y,t) + \mu(Y,t)\frac{\partial f}{\partial y}(Y,t) + \frac{\sigma^2(Y,t)}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(Y,t)\right]dt \\ & + \sigma(Y,t)\frac{\partial f}{\partial y}(Y,t)dW(t). \end{aligned} \tag{7}$$

Võrrandit (7) nimetatakse **Itô valemiks**. [12, lk 5-6]

Eeldame, et optsiooni hind $V(S,t)$ sõltub alusvarahinnast $S(t)$ valemiga (3) ning ajast t ja optsiooni hind optsiooni hinna osatuletised rahuldavad Itô lemma eeldusi. Siis, kasutades alusvara hinda kirjeldavat protsessi (3), kirjeldab optsiooni hinda diferentsiaalvõrrand:

$$\begin{aligned} dV(S,t) = {} & \left[\frac{\partial V}{\partial t}(S,t) + \mu S(t)\frac{\partial V}{\partial S}(S,t) + \frac{\sigma^2(S,t)}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S,t)\right]dt \\ & + \sigma(S,t)\frac{\partial V}{\partial S}(S,t)dW(t) = \\ & = \left[\frac{\partial V}{\partial t}(S,t) + \frac{\sigma^2(S,t)}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S,t)\right]dt + \frac{\partial V}{\partial S}(S,t)dS(t). \end{aligned} \tag{8}$$

Vaatleme sellist portfelli, mida kirjeldab võrdus (6). Võrduse kehtimisel peab kehtima ka

$$d\Pi(S,t) = dV(S,t).$$

Seega peavad võrrandite (5) ja (8) kombineerimisel kehtima võrdused

$$\eta(t) = \frac{\partial V}{\partial S}(S,t) \tag{9}$$

ning

$$\frac{\partial V}{\partial t}(S,t) + \frac{\sigma^2(S,t)}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S,t) = r\big(\Pi(S,t) - \eta(t)S(t)\big). \tag{10}$$

Asendades võrrandis (10) alusvara koguse $\eta(t)$ võrduse (9) põhjal osatuletisega ning asendades portfelli väärtuse optsiooni väärtusega valemi (6) põhjal, jõuame võrduseni

$$\frac{\partial V}{\partial t}(S,t) + \frac{\sigma^2(S,t)}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S,t) = rV(S,t) - rS(t)\frac{\partial V}{\partial S}(S,t).$$

Viime kõik liikmed vasakule poole ja lihtsustame ning saame

$$\frac{\partial V}{\partial t}(S,t) + \frac{\partial V}{\partial S}(S,t)rS(t) + \frac{\sigma^2(S,t)}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S,t) - rV(S,t) = 0. \tag{11}$$

Võrrandit (11) nimetatakse **Black-Scholesi teist järku osatuletistega diferentsiaalvõrrandiks**. Konstantse volatiilsuse korral $\sigma(S,t) = \sigma S(t)$ ning diferentsiaalvõrrand omab kuju:

$$\frac{\partial V}{\partial t}(S,t) + \frac{\partial V}{\partial S}(S,t)rS + \frac{\sigma^2 S^2(t)}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S,t) - rV = 0.$$

Antud diferentsiaalvõrrandil on lõpmata palju lahendeid. Selleks, et optsiooni hind oleks ühene, on vaja ette anda lõpptingimused ehk optsiooni hind ajahetkel $t = T$, mis on võrdne vastava optsiooni väljamaksefunktsiooniga $P(S_T)$.

Euroopa optsioonidel on konstantse volatiilsuse eeldusel Black-Scholesi diferentsiaalvõrrandile analüütiline lahend olemas. Black ja Scholes tõid välja, et Euroopa ostuoptsiooni puhul on diferentsiaalvõrrandi lahendiks

$$V_c = S_0 N(d_1) - Ee^{-rT}N(d_2) \tag{12}$$

ning Euroopa müügioptsiooni puhul on lahendiks

$$V_p = Ee^{-rT}N(-d_2) - S_0 N(-d_1), \tag{13}$$

kus

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/E) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}, \qquad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

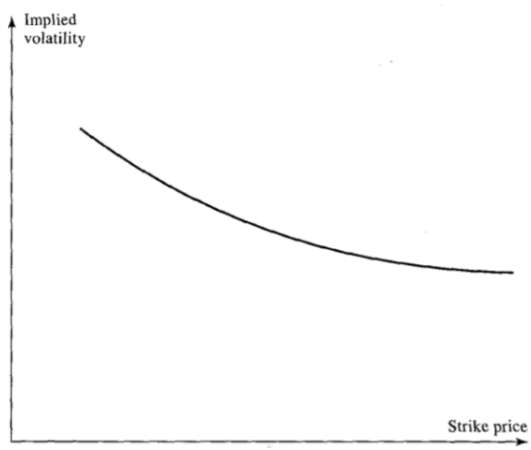
ning S_0 on alusvara alghing ajahetkel $t = 0$, E on optsiooni täitmishind ning optsiooni kestvus on T, r on riskivaba intress ja σ volatiilsuse parameeter. Funktsioon $N(x)$ on standardse normaaljaotuse jaotusfunktsioon.

Vastavad analüütilised valemid saab välja kirjutada ka siis, kui r ja σ on ajast t sõltuvad funktsioonid $r(t)$ ning $\sigma(t)$.

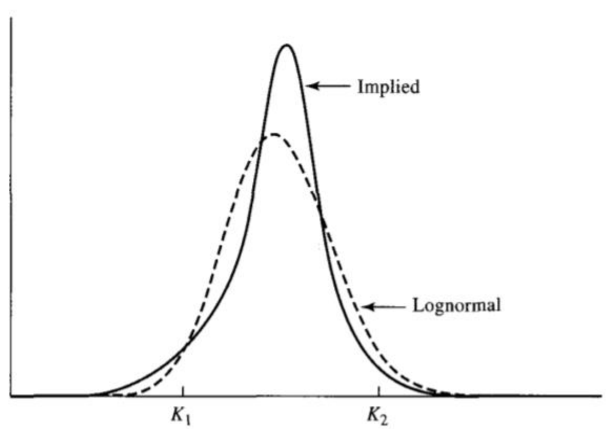
Ameerika optsiooni hinna leidmiseks analüütiline lahend puudub. Üks meetod Ameerika optsiooni hinna leidmiseks, on kasutada binoommeetodit, mida on kirjeldatud alapeatükis 2.1.

1.4. Volatiilsuse naeratus

Black-Scholesi diferentsiaalvõrrand sai loodud eeldusel, et optsiooni hind on log-normaalsest jaotusest ning alusvara tulususe volatiilsus on konstantne. Reaalsus aga viitab sellele, et eeldatav volatiilsus on väiksem, kui täitmishind on suurem (joonis 1). Seetõttu on ka optsiooni eeldatav jaotus raskema parema sabaga ja kergema vasaku sabaga, kui võrrelda seda log-normaalse jaotusega (joonis 2).



Joonis 1. Tulususe volatiilsus sõltuvalt täitmishinnast



Joonis 2. Optsioonide eeldatava jaotuse võrdlus log-normaalsega

Mittekonstantset tulususe volatiilsust hakati märkama alles pärast 1987. aasta majanduslangust. Mark Rubinstein pakkus välja, et volatiilsuse sõltuvus täimishinnast on põhjustatud investorite uuest suhtumisest müügioptsioonidesse, mille täitmishind on alusvara hinnast madalam. Rubinstein nimetas seda ka „krahhofoobiaks“ („*crash-o-phobia“).* Investorid, kes omasid majanduslangusele eelnevalt võrdlemisi madala täitmishinnaga müügioptsioone ning rakendasid oma õigust languse järgselt, teenisid suurt kasumit. Nüüdsest hindavad investorid sääraseid optsioone kõrgemaks, mille tulemusena on 90ndatest kuni tänaseni alusvara tulususe volatiilsus kõrgem. [13]

Alternatiivseid mudeleid, mis aitavad mittekonstantset volatiilsust kirjeldada, on mitmeid. Üks variant on vaadata seda kui alusvara hinnast S ning ajast t sõltuvat funktsiooni, ehk funktsioonina $\sigma(S,t)$, nagu seda on eelnevas alapeatükis kirjeldatud. Sellise eelduse korral peab Black-Scholesi diferentsiaalvõrrand paika.

Alusvara volatiilsus kui funktsioon $\sigma(S,t)$ aitab kirjeldada võimenduse (*leverage*) ehk laenatud kapitali efekti. Ettevõtte hinna määrab selle aktsia hind ning lisaks ettevõtte võlad. Kui osa ettevõtet on rahastatud, kasutades võlga, siis on vastavad alusvarad või optsioonid võimendatud. Kui aga ettevõtte, mis on oma väärtuse saavutanud müües aktsiaid ning võlakirju, kaotab oma väärtust, siis esimesena saavad kannatada aktsiate või nendega seotud optsioonide omanikud. Näiteks, kui ettevõtte on saavutanud oma väärtuse 100 ühikut, müües 50% ulatuses aktsiaid ning 50% ulatuses võlakirju, siis ettevõtte väärtuse 10-ühikulisel langusel on aktsiate hind kahanenud 20%, kuid võlakirjad on puutumata. Seega aktsiate tulu volatiilsus kasvab, kui ettevõtte väärtus ning sellega seotud optsioonide väärtus langeb. Seda kirjeldab ka joonis 1. Matemaatiliselt saab selle kirja panna, et kui ettevõtte väärtus V on aktsiate väärtuste summa S ning võlakirjade väärtuste summa B:

$$\mathrm{V} = S + B,$$

ning ettevõtte väärtuse kasv sõltuvalt ettevõtte vaadeldava hetke väärtusest on konstantne

$$\frac{d\mathrm{V}}{\mathrm{V}} = \sigma dW,$$

siis alusvara tootlus on

$$\frac{dS}{S} = \frac{d(V-B)}{S} = \frac{dV}{S} = \frac{V\sigma dW}{S} = \sigma\left(1+\frac{B}{S}\right)dW,$$

ehk alusvara tulususe volatiilsus on $\sigma_1(S) = \sigma\left(1 + \frac{B}{S}\right)$.

Alternatiivselt võib volatiilsuse funktsiooni $\sigma(S,t)$ valimisel eeldada, et alusvara allub konstantse elastsusega dispersiooni protsessile, mida kirjeldatakse alapeatükis 1.5.

Kuid volatiilsuse kirjeldamine funktsiooni $\sigma(S,t)$ kaudu ei ole ainuke variant volatiilsuse naeratuse kirjeldamiseks. Üheks võimaluseks on vaadata alusvara volatiilsust ennast, kui stohhastilist protsessi. Seega vaatleme alusvara hinna ning volatiilsuse käitumist kirjeldavaid stohhastilisi protsesse kujul

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW,$$
$$d\sigma = p\sigma dt + q\sigma dW',$$
$$E[dWdW'] = \rho dt$$

kus $W'(t)$ on standardne Wieneri protsess, q on volatiilsuse volatiilsus ja ρ on alusvara hinna ja alusvara volatiilsuse korrelatsioon (näiteks Hestoni mudel). Kuigi reaalses elus võib tunduda, et volatiilsus omab juhuslikku elementi, on seda teoorias väga keeruline rakendada. Juhul kui vaatleme volatiilsust kui stohhastilist protsessi, siis arbitraaži võimaluse puudumise tingimusest ei piisa, et optsiooni etteantud väljamaksefunktsiooni korral üheselt hinnata. Üheselt hindamiseks on vaja teha täiendavaid eeldusi. Meetodi põhiprobleemiks on sobiliku stohhastilise diferentsiaalvõrrandi mitte teadmine. Lisaks on korrelatsiooni ρ vaatlemine konstantsena vaieldav, sest praktikas on ka korrelatsioon stohhastiline protsess ning võimalik, et isegi suurema varieeruvusega kui volatiilsus.

Kuigi mudeleid, mis kirjeldavad volatiilsuse naeratust on väga palju ning neid tekib ka üha juurde, keskendume antud töös neist vaid ühele, milleks on konstantse elastsusega dispersiooni ehk CEV mudel.

1.5. Konstantse elastsusega dispersiooni (CEV) mudel

Definitsioon. Tulususe varieeruvuse elastsus ε alusvara hinna suhtes on defineeritud kui

$$\varepsilon = \frac{d\sigma_1^2/\sigma_1^2}{dS/S}, \tag{14}$$

kus $S = S(t)$ on alusvara hind ajahetkel t ning $\sigma_1(S,t) = \frac{\sigma(S,t)}{S(t)}$ on alusvara tulususe volatiilsust kirjeldav funktsioon. [9, lk. 123]

Konstantse elastsusega dispersiooni mudel ehk CEV mudeli pakkus välja Cox 1975. aastal. Kui Black-Scholesi eelduste puhul on alusvara tulususe volatiilsus konstante, siis CEV mudelis on konstantne volatiilsus valemis (4) asendatud CEV protsessile vastava hinnast sõltuva funktsiooniga

$$\sigma(S,t) = \sigma S^{\frac{\beta}{2}}(t) \tag{15}$$

ning alusvara käitumine allub mudelile

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S^{\frac{\beta}{2}}(t)\, dW(t), \tag{16}$$

kus $\mu = r$ on riskivaba intress, σ on volatiilsusele viitav parameeter ning β on positiivne parameeter. [3]

Näitame, et CEV mudeli korral on alusvara tulususe volatiilsuse $\sigma_1(S,t) = \sigma S^{\frac{\beta-2}{2}}$ elastsus konstantne ning sõltub parameetrist β. Selleks võtame CEV mudelile vastava volatiilsuse (15) ning leiame selle ruudu tuletise alusvara hinna suhtes. Saame

$$\frac{d\sigma_1^2}{dS} = \sigma^2(\beta-2)S^{\beta-3}.$$

Korrutame tulemust $S(t)/\sigma^2(S,t)$-ga ning saame, et elastsus on

$$\varepsilon = \frac{d\sigma_1^2/\sigma_1^2}{dS/S} = \sigma^2(\beta-2)S^{\beta-3} \cdot \frac{S}{\sigma^2 S^{\beta-2}} = \beta - 2,$$

millega oleme näidanud, et CEV mudeli puhul on varieeruvuse elastsus (14) konstantne ning sõltub parameetrist β.

Kui $\beta = 2$ ehk elastsus $\varepsilon = 0$, on tegemist Black-Scholesi mudeliga alusvara käitumise kohta (4). Kui $\beta < 2$, siis tulususe volatiilsus kahaneb alusvara hinna kasvades. See tekitab tihedusfunktsiooni raskema vasakpoolse sabaga ning kergema paremapoolse sabaga nagu joonisel 2. Kuigi CEV mudel lubab β väärtusel olla ka suurem kui 2, siis käesolevas töös uuritavate optsioonide puhul vaatleme ainult olukorda, kus $\beta < 2$.

CEV mudelile vastav Black-Scholesi diferentsiaalvõrrand on

$$\frac{\partial V}{\partial t}(S,t) + \frac{\partial V}{\partial S}(S,t)rS + \frac{\sigma^2 S^\beta(t)}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S,t) - rV = 0, \tag{17}$$

mille lahendiks eeldusel $\beta < 2$ on vastavalt Euroopa ostu- ja müügioptsioonide korral

$$V_c = S_0[1 - \chi^2(a, b+2, c)] - Ee^{-rT}\chi^2(c, b, a), \tag{18}$$

$$V_p = Ee^{-rT}[1 - \chi^2(c, b, a)] - S_0\chi^2(a, b+2, c), \tag{19}$$

kus

$$a = \frac{(Ee^{-rT})^{2\left(1-\frac{\beta}{2}\right)}}{\left(1-\frac{\beta}{2}\right)^2 \omega}, \qquad b = \frac{1}{1-\frac{\beta}{2}}, \qquad c = \frac{S_0^{2\left(1-\frac{\beta}{2}\right)}}{\left(1-\frac{\beta}{2}\right)^2 \omega},$$

$$\omega = \frac{\sigma^2}{2r\left(\frac{\beta}{2}-1\right)}\left[e^{2r\left(\frac{\beta}{2}-1\right)T} - 1\right]$$

ning $\chi^2(z, k, w)$ on mittetsentraalse hii-ruudu jaotusfunktsioon, tihedusfunktsiooniga

$$f(z,k,w) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{w}{2}}\left(\frac{w}{2}\right)^i}{i!} \cdot \frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} z^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{z}{2}},$$

vabadusastmetega k, mittetsentraalse parameetriga w ning $\Gamma(x)$ on Euleri gammafunktsioon. [3]

2. Binoommeetod

2.1. Binoommeetod alusvara tulususe konstantse dispersiooni korral.

Antud alapeatüki kirjutamisel on põhiliselt kasutatud õpikut [7] ning loengukonspekti [11]. Muudele allikatele on viidatud tekstisiseselt.

Kui Euroopa optsioonide väärtuse arvutamiseks on olemas analüütiline valem, siis keerulisemat tüüpi optsioonide puhul nagu seda on Ameerika optsioonid, valem puudub. Siiski on tegemist populaarse optsiooni tüübiga, mistõttu on vaja adekvaatset meetodit optsiooni hinna leidmiseks, et puuduks arbitraaži võimalus.

Binoommeetod alusvara hinna ennustamisel seisneb optsiooni kestuse $t \in [0; T]$ jaotamisel võrdseteks ajavahemikeks ehk sammudeks pikkustega Δt. Kehtivate eelduste korral võib alusvara väärtusega S_t aja Δt möödumisel saavutada lõpmata palju erinevaid väärtuseid. Binoommeetod kitsendab võimaluste hulga igal sammul vaid kaheni, ehk igal sammul võib alusvara väärtus vaid kasvada või kahaneda mingi teguri võrra. Nende kahe sündmuste tõenäosuste summa on 1.

Binoommeetod optsiooni hinna määramiseks töötati välja konstantsele volatiilsusele. Seetõttu eeldame antud alapeatüki raames alusvara tulususe konstantset volatiilsust. Mittekonstantse volatiilsusega tekkivaid probleeme binoommeetodi puhul on kirjeldatud antud alapeatüki lõpus.

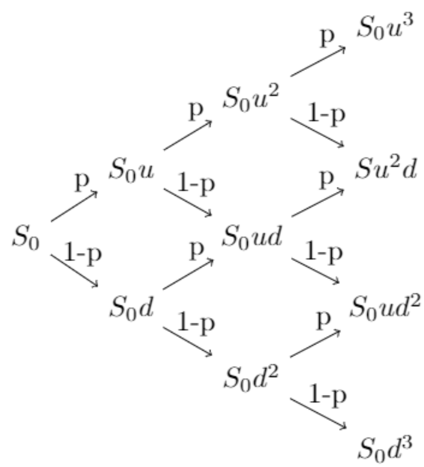
Olgu sammude arv N, iga sammu pikkus $\Delta t = \frac{T}{N}$. Tähistagu n sammu, $n \in \{0, \dots, N\}$ ning S_n sammul n olevat alusvara väärtust. Ajahetkel $t = 0$, ehk sammul $n = 0$, on alusvara hinnaks S_0. Järgmisel sammul $n = 1$ võib alusvara hind kas kahaneda või kasvada. Olgu need saadud korrutisena vastavalt $S_0 d$ ning $S_0 u$. Sammul $n = 2$ võib $S_0 u$ kasvamisel alusvara väärtuseks saada $S_0 u^2$, $S_0 d$ kahanemisel saada väärtuseks $S_0 d^2$ ning $S_0 u$ kahanemisel ning ka $S_0 d$ kasvamisel saavutatakse ühine väärtus $S_0 ud$. Viimane kehtib, kui binoompuu on rekombineeriv, mida me edaspidi eeldame. Mitte rekombineeriva binoompuu korral, kus $S_0 u$ alla liikumisel ning $S_0 d$ üles liikumisel ei saavutata sama väärtust, kahekordistub igal sammul erinevate võimalike alusvara hindade hulk. Ehk näiteks $n = 100$ korral on viimasel sammul alusvara saavutatud erinevate väärtuste hulk kuni 2^{100}, tehes arvutused liialt töömahukaks ning meetod ei omaks enam mõtet.

Kokkuvõttes on rekombineeriva binoommeetodi korral sammul n alusvara võimalikud väärtused

$$S_0 u^{n-j} d^j,$$

kus $j \in \{0; 1; \dots; n\}$.

Binoompuu täitmine jätkub analoogselt kuni jõutakse viimase sammuni, kus alusvara väärtused vastavad võimalikele väärtustele ajahetkel T.



Joonis 3. Alusvara hinnapuu

Lisaks peab optsiooni hindamisel binoommeetodil teadma sammudel $n \in \{0; 1; \dots; N-1\}$ iga alusvara üles ja alla liikumiste tõenäosused vastavalt p ja $1-p$.

Binoommeetodis valitakse parameetrid u, d ja p selliselt, et oleksid täidetud tingimused:

1) alusvara hinna keskmine tõus iga ajaintervalli Δt tagant vastaks arbitraaži võimaluse puudumisele, ehk sammu Δt jooksul on alusvara keskmine hinna tõus võrdne selle alusvara mahamüümise ning hoiuse kaudu saadud riskivaba intressiga:

$$S_n(pu + (1-p)d) = S_n e^{r\Delta t};$$

2) sõltuvalt alusvara hinna käitumise eeldustele on tootluse $\frac{\Delta S(t)}{S(t)}$ valemist (4) dispersioon ligikaudu võrdeline suurusega Δt, ehk

$$\mathrm{Var}\left(\frac{\Delta S(t)}{S(t)}\right) = \sigma^2 \Delta t + o(\Delta t),$$

kus σ on alusvara tulususe volatiilsus ning $o(\Delta t)$ rahuldab tingimust $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$.

Tingimuste 1) ja 2) põhjal ei ole parameetrid u, d ning p üheselt määratud. Näiteks on Cox, Ross ning Rubinstein pakkunud välja meetodi (CRR meetod), kus üles ja alla liikumise kordajad ning riskineutraalne tõenäosus avalduvad valemitega

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \qquad d = \frac{1}{u}, \qquad p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}. \tag{20}$$

Tähistagu alusvara hindu binoompuus $S_{n,i} = S_0 u^i d^{n-i}$, kus n viitab sammule ning $i \in \{0; 1; \dots; n\}$ viitab antud sammul erinevatele võimalikele alusvara väärtustele, mis on järjestatud alates vähimast. Olgu alusvara $S_{n,i}$ väärtuse tõusmine hinnaks $S_{n+1,i+1}$ tõenäosus $p_{n,i} = p$ ning alusvara hinnale $S_{n,i}$ vastav optsiooni hind $V_{n,i}$.

Kui soovime hinnata binoommeetodil Euroopa optsiooni väärtust, siis rakendame ajahetkele T vastavatele alusvara väärtustele $S_{N,i}$ väljamaksefunktsiooni $P(S_{N,i})$, et saada optsiooni hind $V_{N,i}$.

Nüüd liigutakse tagasi sammule $n = N - 1$. Iga väärtuse S_{N-1} puhul leiame hinna tõusu tõenäosuse $p_{N-1,i}$ ning korrutame selle optsiooni hinnaga $V_{N,i+1}$. Teeme sama langusega, korrutades $(1 - p_{N-1,i})$ optsiooni hinnaga $V_{N,i}$. Tulemused liites saame optsiooni $V_{N-1,i}$ hinna sammul $n = N$. Et saada hinda sammul $n = N - 1$, tuleb arvesse võtta riskivaba intress ning korrutada summa $e^{-r\Delta t}$-ga. Valemina näeb see välja

$$V_{n,i} = e^{-r\Delta t}\big(p_{n,i}V_{n+1,i+1} + \big(1 - p_{n,i}\big)V_{n+1,i}\big). \tag{21}$$

Kordame sama tehnikat kuni jõuame sammuni $n = 0$, kus $V_{0,0}$ on optsiooni hind ajahetkel $t = 0$.

Ameerika optsiooni hindamine on veidi keerulisem protsess, sest optsiooni omanikul on võimalus oma õigust rakendada igal ajahetkel. Seega ainult S_T võimalike väärtuste vaatamisest ei piisa. Binoommeetod on aga teinud lihtsustuse diskretiseerides aega. Vaadates iga sammu eraldi, on tegemist kui Euroopa tüüpi optsiooniga, sest ühe sammu keskel pole võimalik oma õigust rakendada.

Kui Ameerika optsiooni õigust kasutada alles optsiooni täitmisaja lõpus, siis vastab teenitud tulu väljamaksefunktsioonile:

$$V_{N,i} = P(S_{N,i}).$$

Liikudes sammu võrra tagasi, vaatame taas igat tippu eraldi. Iga alusvara hinna juures on optsiooni omanikul võimalus kas säilitada oma õigus või seda rakendada. Õiguse säilitamisel liigub järgmisel sammul alusvara väärtus üles või alla. Eeldatava tulu saame arvutada valemiga (21).

Õiguse rakendamisel kasutame väljamaksefunktsiooni P_T tulu arvutamisel. Suurima tulu saavutamiseks valime antud tipus optsiooni väärtuseks kahe variandi maksimumi:

$$V_{n,i} = \max\Big(P(S_{n,i}); e^{-r\Delta t}\big(p_{n,i}V_{n+1,i+1} + \big(1 - p_{n,i}\big)V_{n+1,i}\big)\Big). \qquad (22)$$

Sarnaselt Euroopa optsioonile, on Ameerika optsiooni puhul ajahetkel $t = 0$ hinnaks $V_{0,0}$.

Binoommeetodi pakkus esimesena välja William F. Sharpe 1978. aastal ning hiljem näidati [4], et sobivalt valitud parameetrite korral koondub binoommeetodi abil leitud optsiooni hind Euroopa optsioonide korral täpseks hinnaks. Näiteks sobivad parameetrite valikuks valemid (20). See viitab binoommeetodi sobivusele Black-Scholesi eeldustel keerulisemat tüüpi optsioonide hindamiseks.

CEV mudeli puhul on binoommeetodi loomine keerulisem, sest enam ei eeldata konstantset volatiilsust. Kasutades Black-Scholesi tarbeks loodud binoommeetodi algoritme (näiteks CRR meetodit), ei ole tulemuseks rekombineeriv binoommeetod. Näiteks, kasutades u ja d valemeid (20), aga CEV mudeli volatiilsust (15), saame ($S_0 = 1$; $\sigma = 0{,}2$; $\beta = 1, \Delta t = 0.01$)

$$S_0 ud = S_0 e^{\sigma S_0^{\frac{\beta-2}{2}}\sqrt{\Delta t}} e^{-\sigma (S_0 u)^{\frac{\beta-2}{2}}\sqrt{\Delta t}} \approx 1{,}02,$$

$$S_0 du = S_0 e^{-\sigma S_0^{\frac{\beta-2}{2}}\sqrt{\Delta t}} e^{-\sigma (S_0 d)^{\frac{\beta-2}{2}}\sqrt{\Delta t}} \approx 1{,}00,$$

ehk $S_0 ud \neq S_0 du$.

Seetõttu on CEV protsessi eeldusel vaja luua uus algoritm. Järgnevates alapeatükkides vaatame kahte kirjandusest pärit binoommeetodit CEV mudeli korral. Esimeseks neist on Nelson-Ramaswamy binoommeetod, mis teisendab alusvara käitumise CEV mudeli puhul konstantse volatiilsusega mudeliks ning rakendab sellele CRR meetodit. Teine on Choe-Chu-Shin meetod, mis tuletab binoommeetodi, kasutades selleks ilmutatud lõplikku diferentsmeetodit.

2.2. Nelson-Ramaswamy (N-R) binoommeetod

Antud alapeatükk kirjeldab Daniel B. Nelsoni ja Krishna Ramaswamy loodud meetodit [10].

Daniel B. Nelson ning Krishna Ramaswamy lõid 1990. aastal universaalse binoommeetodi Itô protsesside jaoks, viies need üle konstantse volatiilsusega kujule.

Binoommeetodi üles ja alla liikumiseks ning üles liikumise tõenäosuse arvutamiseks kasutatakse Cox ja Rubinsteini 1985. aasta soovitatud valemeid

$$Y_{n+1,i+1} = Y_{n,i} + \sqrt{\Delta t}\sigma, \tag{23}$$

$$Y_{n+1,i} = Y_{n,i} - \sqrt{\Delta t}\sigma, \tag{24}$$

$$p_{n,i} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\Delta t}\mu}{2\sigma}, \tag{25}$$

kus $dY(t) = \frac{dS(t)}{S(t)}$ vastab protsessile

$$dY(t) = \mu dt + \sigma dW(t).$$

Soovime, et binoompuu oleks rekombineeriv. Kui volatiilsus $\sigma(S,t)$ sõltub ajast, siis see nii ei pruugi olla. Kui aga $\sigma(S,t)$ on konstantne, nagu ta on seda Black-Scholesi eeldustel, siis on tulemuseks rekombineeriv binoompuu.

Selle saavutamiseks alustame Itô valemist, ning valime valemis (3), uuesti kirja panduna

$$df(Y,t) = \left[\frac{\partial f}{\partial t}(Y,t) + \mu(Y,t)\frac{\partial f}{\partial y}(Y,t) + \frac{\sigma^2(Y,t)}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(Y,t)\right]dt + \sigma(Y,t)\frac{\partial f}{\partial y}(Y,t)dW(t),$$

funktsiooni $X(Y,t) = f(Y,t)$ selliselt, et

$$X(Y,t) = \int^{Y} \frac{dZ}{\sigma(Z,t)}.$$

Siis Itô valemi viimane liidetav

$$\frac{\partial X}{\partial y}(Y,t)\sigma(Y,t)dW(t) = dW(t).$$

Seega on Itô protsessi $X(Y,t)$ volatiilsus konstantne ning võrdne 1-ga. See tähendab, et binoompuus on võimalik kasutada puhul valemeid (23)-(25), kasutades alusvara hinna asemel funktsiooni $X(S,t)$ väärtuseid ning tulemus on rekombineeriv. Kui $X(Y,t)$ väärtused binoompuus on leitud, siis saame leida alusvara hinna väärtused, kasutades $X(Y,t)$ pöördfunktsiooni $Y(X,t)$.

Lisaks valivad Nelson ja Ramaswamy üles liikumise tõenäosuseks

$$p_{n,i} = \frac{\Delta t \mu\left(Y_{n,i}, t\right) + Y_{n,i} - Y_{n+1,i}}{Y_{n+1,i+1} - Y_{n+1,i}},$$

mis eeldusel, et saadav väärtus kuulub hulka $[0;1]$, seab binoommeetodi triivi vastavaks Itô protsessis oleva triiviga.

Nelson ja Ramaswamy märgivad, et kuigi vastavad valemid loovad eeldused rekombineerivaks binoompuuks, siis sõltuvalt Itô protsessist võib olukord nõuda teatud parandusi. Näiteks ei pruugi $p_{n,i}$ väärtus sattuda soovitud lõiku või on vaja teha binoompuus suurem hüpe, et triiv jääks vastama riskivabale intressile.

2.2.1. Optsioonide hindamine CEV protsessi korral

CEV mudeli korral on $\sigma(S,t) = \sigma S^{\frac{\beta}{2}}(t)$ ning integraali

$$X(S,t) = \int^{S} \frac{dZ}{\sigma Z^{\frac{\beta}{2}}}$$

väärtuseks saame

$$X(S) = \frac{S^{\left(1-\frac{\beta}{2}\right)}}{\sigma\left(1-\frac{\beta}{2}\right)}. \tag{26}$$

$X(S,t)$ pöördfunktsiooniks on

$$S(X) = \begin{cases} \left(\sigma\left(1-\frac{\beta}{2}\right)X\right)^{\frac{1}{1-\beta/2}}, & \text{kui } X > 0, \\ 0, & \text{kui } X \leq 0. \end{cases} \tag{27}$$

Saame konstrueerida binoompuu, alustades väärtusest S_0, millele vastab väärtus $X_0 = X(S_0)$. Järgminevate sammude uued väärtused saame kasutades valemeid

$$S_{n+1,i+1} = S\left(X_{n,i} + J_u(X_{n,i})\sqrt{\Delta t}\right) \tag{28}$$

ning

$$S_{n+1,i} = S\left(X_{n,i} - J_d(X_{n,i})\sqrt{\Delta t}\right), \tag{29}$$

kus $J_d(x)$ ja $J_u(x)$ aitavad kirjeldada eelnevalt mainitud vajadust suuremale hüppele väärtustega:

$J_u(x)$ on vähim paaritu naturaalarv j, et $\frac{4\Delta tnr}{\sigma^2} + x^2(1 - n\Delta t) < \left(x + j\sqrt{\Delta t}\right)^2$,

$J_d(x)$ on vähim paaritu naturaalarv j, et $\frac{4\Delta tnr}{\sigma^2} + x^2(1 - n\Delta t) \geq \left(x - j\sqrt{\Delta t}\right)^2$ või $x - j\sqrt{\Delta t} \geq 0$.

Iga üles hüppe tõenäosust kirjeldab valem

$$p_{n,i} = \frac{\Delta trS_{n,i} + S_{n,i} - S_{n+1,i}}{S_{n+1,i+1} - S_{n+1,i}}, \tag{30}$$

mis võrdsustatakse nulli või ühega, kui see saavutab vastavalt negatiivse väärtuse või ühest suurema väärtuse. Alla hüppe tõenäosus on $1 - p_{n,i}$.

2.2.2. Näide optsiooni hindamisest N-R binoommeetodiga

Olgu alusvara väärtus optsiooni ostmisel $S_{0,0} = 1$, optsiooni täitmisaeg $T = \frac{1}{2}$ ning sammude arv 2 $\left(\Delta t = \frac{1}{4}\right)$. Olgu $r = 0{,}05$, $\sigma = 0{,}2$ ning valime $\beta = 1$.

Esiteks leiame $S_{0,0}$-le vastava X-i väärtuse, kasutades valemit (26):

$$X_{0,0} = X(S_{0,0}) = \frac{S_{0,0}^{\left(1-\frac{\beta}{2}\right)}}{\sigma\left(1 - \frac{\beta}{2}\right)} = 10.$$

Järgmiseks soovime leida väärtused $S_{1,1}$ ning $S_{1,0}$, mis saame vastavalt valemitega (28) ja (29) ning $S(X)$ valemiga (27). Selleks märgime ära, et $J_u(X_{0,0}) = 1$ ning $J_d\left(X_{0,0}\right) = 1$. Seega

$$S_{1,1} = S\left(X_{0,0} + J_u\left(X_{0,0}\right)\sqrt{\Delta t}\right) = S(10 + 0{,}5) = 1{,}1025,$$
$$S_{1,0} = S\left(X_{0,0} - J_d\left(X_{0,0}\right)\sqrt{\Delta t}\right) = S(10 - 0{,}5) = 0{,}9025,$$

kusjuures $X_{1,1} = 10{,}5$ ning $X_{1,0} = 9{,}5$, sest valemite (26) ja (27) põhjal

$$X_{n,i} = X\left(S_{n,i}\right) = X\left(S\left(X_{n,i}\right)\right)$$

ehk näiteks $S_{1,1}$ arvutamisel saadud $X_{0,0} + J_u\left(X_{0,0}\right)\sqrt{\Delta t}$ väärtus on võrdne $X_{1,1}$-ga.

Kordame sama tehnikat viimase sammu alusvara väärtuste arvutamiseks. Taaskord on $J_u(X_{1,1})$, $J_u(X_{1,0})$ ning $J_d(X_{1,0})$ väärtused 1. Saame leida:

$$S_{2,2} = S\left(X_{1,1} + J_u\left(X_{1,1}\right)\sqrt{\Delta t}\right) = S(10{,}5 + 0{,}5) = 1{,}21,$$
$$S_{2,1} = S\left(X_{1,0} + J_u\left(X_{1,0}\right)\sqrt{\Delta t}\right) = S(10) = 1,$$
$$S_{2,0} = S\left(X_{1,0} - J_d\left(X_{1,0}\right)\sqrt{\Delta t}\right) = S(9{,}5 - 0{,}5) = 0{,}81.$$

Sellega on binoompuu täidetud ning ajahetkel $t = \frac{1}{2}$ võib antud sammude arvu korral alusvara hindadeks tulla 1,21, 1 või 0,81.

Euroopa müügioptsiooni täitmishinnaga 1 hindamiseks rakendame sammu $n = 2$ alusvara väärtustele väljamaksefunktsiooni

$$V_{2,i} = P(S_{2,i}) = \max\{E - S_{2,i}; 0\},$$

mille tulemuseks saame $V_{2,0} = 0{,}19$ ning $V_{2,1} = V_{2,2} = 0$. Nüüd liigume sammu võrra tagasi, ning leiame optsiooni hinnad $V_{1,1}$ ning $V_{1,0}$ kasutades valemit (21). Selleks on eelnevalt vaja leida $p_{1,1}$ ning $p_{1,0}$ kasutades valemit (30):

$$p_{1,1} = \frac{\Delta t r S_{1,1} + S_{1,1} - S_{2,1}}{S_{2,2} - S_{2,1}} = 0{,}5537,$$
$$p_{1,0} = \frac{\Delta t r S_{1,0} + S_{1,0} - S_{2,0}}{S_{2,1} - S_{2,0}} = 0{,}5462.$$

Nüüd saame arvutada optsiooni hinnad valemiga (21):

$$V_{1,1} = e^{-r\Delta t}\left(p_{1,1}V_{2,2} + \left(1 - p_{1,1}\right)V_{2,1}\right) = 0,$$
$$V_{1,0} = e^{-r\Delta t}\left(p_{1,0}V_{2,1} + \left(1 - p_{1,0}\right)V_{2,0}\right) = 0{,}0873.$$

Viimaks kasutame taaskord valemit (30), et leida

$$p_{0,0} = \frac{\Delta t r S_{0,0} + S_{0,0} - S_{1,0}}{S_{1,1} - S_{1,0}} = 0{,}55$$

ning kirjeldatud optsiooni hind ajahetkel $t = 0$ on

$$V_{0,0} = e^{-r\Delta t}\left(p_{0,0}V_{1,1} + \left(1 - p_{0,0}\right)V_{1,0}\right) = 0{,}0398$$

2.3. Choe-Chu-Shin (CCS) binoommeetod

Selles alapeatükis tutvustame Hi Jun Choe, Jeong Ho Chu ja So Jeong Shini välja pakutud binoommeetodit [2], kasutades lisaks loengumaterjali [8].

2.3.1. Alusvara hinnapuu konstrueerimine

Muudame seni kasutatud tähiseid nii, et alusvara hind $S_{n,i}$ võib langeda hinnani $S_{n+1,i-1}$ või tõusta hinnani $S_{n+1.i+1}$, kusjuures $S_{n+1,i} = S_{n,i}$. Ehk lisame igal sammul n saavutatavate väärtuste vahele eelmisel sammul $n-1$ saavutatavad alusvara väärtused, mida sammul n binoompuu puhul saavutada pole võimalik. Iga sammu n korral $i \in \{-n; -n+1; \dots; 0; \dots; n\}$. Sarnane tähistus kehtib ka optsiooni hindade ning tõenäosustega. Vahepealsete ehk mitte saavutatavate väärtuste tõenäosus on 0.

Püüame leida hinnangu optsiooni väärtusele $V_{n-1,i}$. Kasutame selleks ilmutatud (*explicit)* diferentsmeetodit, asendades osatuletised Black-Sholesi diferentsiaalvõrrandis (17) nende ligikaudsete hinnangutega:

$$\frac{\partial V}{\partial t}(S,t) \approx \frac{V_{n,i} - V_{n-1,i}}{\Delta t},$$
$$\frac{\partial V}{\partial S}(S,t) \approx \frac{V_{n,i+1} - V_{n,i-1}}{S_{n,i+1} - S_{n,i-1}}.$$

Viidetes kasutatud valemis on ΔS asendatud väärtusega $S_{n,i} - S_{n,i-1}$, sest me ei saa eeldada, et kahe alusvara hinna vahe on iga i korral konstantne.

Teist järku osatuletise tarbeks kasutame hinnangut

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S,t) \approx \frac{\frac{V_{n,i+1} - V_{n,i}}{S_{n,i+1} - S_{n,i}} - \frac{V_{n,i} - V_{n,i-1}}{S_{n,i} - S_{n,i-1}}}{\frac{1}{2}\left(S_{n,i+1} - S_{n,i-1}\right)}.$$

Märgime, kui kahe järjestikuse hinnavahe on konstantne tähistades $S_{n,i} - S_{n,i-1} = \Delta S$, siis saame

$$\frac{\frac{V_{n,i+1} - V_{n,i}}{S_{n,i+1} - S_{n,i}} - \frac{V_{n,i} - V_{n,i-1}}{S_{n,i} - S_{n,i-1}}}{\frac{1}{2}\left(S_{n,i+1} - S_{n,i-1}\right)} = \frac{\frac{V_{n,i+1} - V_{n,i}}{\Delta S} - \frac{V_{n,i} - V_{n,i-1}}{\Delta S}}{\frac{1}{2}(2\Delta S)} = \frac{V_{n,i+1} - 2V_{n,i} + V_{n,i-1}}{\Delta S^2},$$

ning diskretiseerimine toimub nii nagu tavalise ilmutatud diferentsmeetodi korral [8].

Kasutades eespool toodud hinnanguid diferentsiaalvõrrandis (17), saame võrrandi viia kujule:

$$\frac{V_{n,i}-V_{n-1,i}}{\Delta t}+\frac{V_{n,i+1}-V_{n,i-1}}{S_{n,i+1}-S_{n,i-1}}rS_{n,i}+\frac{\sigma^2\left(S_{n,i}\right)^\beta}{2}\frac{\frac{V_{n,i+1}-V_{n,i}}{S_{n,i+1}-S_{n,i}}-\frac{V_{n,i}-V_{n,i-1}}{S_{n,i}-S_{n,i-1}}}{\frac{1}{2}(S_{n,i+1}-S_{n,i-1})}-rV_{n-1,i}=0$$

Lihtsustame saadud võrrandit, et saada valem $V_{n-1,i}$ jaoks, viies kõik $V_{n-1,i}$-ga liikmed vasakule:

$$\frac{V_{n-1,i}}{\Delta t}+rV_{n-1,i}=\frac{V_{n,i}}{\Delta t}+\frac{V_{n,i+1}-V_{n,i-1}}{S_{n,i+1}-S_{n,i-1}}rS_{n,i}+\frac{\sigma^2\left(S_{n,i}\right)^\beta}{S_{n,i+1}-S_{n,i-1}}\left(\frac{V_{n,i+1}-V_{n,i}}{S_{n,i+1}-S_{n,i}}-\frac{V_{n,i}-V_{n,i-1}}{S_{n,i}-S_{n,i-1}}\right)$$

ehk

$$(1+r\Delta t)V_{n-1,i}=V_{n,i}+\frac{V_{n,i+1}-V_{n,i-1}}{S_{n,i+1}-S_{n,i-1}}rS_{n,i}\Delta t+\frac{\sigma^2\left(S_{n,i}\right)^\beta\Delta t}{S_{n,i+1}-S_{n,i-1}}\left(\frac{V_{n,i+1}-V_{n,i}}{S_{n,i+1}-S_{n,i}}-\frac{V_{n,i}-V_{n,i-1}}{S_{n,i}-S_{n,i-1}}\right).$$

Jagades viimase võrdse läbi kordajaga $(1+r\Delta t)$ saame valemi optsiooni hinna leidmiseks ajahetkel $t+(n-1)\Delta t$, juhul kui on teada optsioonide hinnad ajahetkel $t+n\Delta t$:

$$V_{n-1,i}=\frac{1}{1+r\Delta t}\left(h_{n,i+1}V_{n,i+1}+h_{n,i}V_{n,i}+h_{n,i-1}V_{n,i-1}\right),\tag{31}$$

kus

$$h_{n,i+1}=\frac{rS_{n,i}\Delta t}{S_{n,i+1}-S_{n,i-1}}+\frac{\sigma^2\left(S_{n,i}\right)^\beta\Delta t}{\left(S_{n,i+1}-S_{n,i-1}\right)\left(S_{n,i+1}-S_{n,i}\right)},$$

$$h_{n,i}=1-\frac{\sigma^2\left(S_{n,i}\right)^\beta\Delta t}{S_{n,i+1}-S_{n,i-1}}\left(\frac{1}{S_{n,i+1}-S_{n,i}}+\frac{1}{S_{n,i}-S_{n,i-1}}\right),$$

$$h_{n,i-1}=\frac{-rS_{n,i}\Delta t}{S_{n,i+1}-S_{n,i-1}}+\frac{\sigma^2\left(S_{n,i}\right)^\beta\Delta t}{\left(S_{n,i+1}-S_{n,i-1}\right)\left(S_{n,i}-S_{n,i-1}\right)}.$$

Seega saab diferentsmeetodi puhul optsiooni $V_{n-1,i}$ väärtust leida, kasutades kolme optsiooni väärtust, mis kuuluvad järgnevasse sammu n. Järgmise sammu optsioonide mõju kirjeldavad kolm kordajat: $h_{n,i+1}$, $h_{n,i}$ ning $h_{n,i-1}$. Binoommeetodi korral oleks vajalik, et optsiooni hind hetkel $t+(n-1)\Delta t$ oleks seotud vaid kahe hinnaga hetkel $t+n\Delta t$. Selle saavutamiseks võrdsustame valemis (31) $h_{n,i}$ nulliga:

$$1-\frac{\sigma^2\left(S_{n,i}\right)^{\beta}\Delta t}{S_{n,i+1}-S_{n,i-1}}\left(\frac{1}{S_{n,i+1}-S_{n,i}}+\frac{1}{S_{n,i}-S_{n,i-1}}\right)=0,$$

ehk

$$\frac{\sigma^2\left(S_{n,i}\right)^{\beta}\Delta t}{S_{n,i+1}-S_{n,i-1}}\left(\frac{1}{S_{n,i+1}-S_{n,i}}+\frac{1}{S_{n,i}-S_{n,i-1}}\right)=1.$$

Jätame eelnevas võrduses $\sigma^2\left(S_{n,i}\right)^{\beta}\Delta t$ vasakule poole ning võtame murrud kokku:

$$\sigma^2\left(S_{n,i}\right)^{\beta}\Delta t=\left(S_{n,i+1}-S_{n,i-1}\right)\left(\frac{S_{n,i+1}-S_{n,i-1}}{\left(S_{n,i+1}-S_{n,i}\right)\left(S_{n,i}-S_{n,i-1}\right)}\right)^{-1}.$$

Saame tulemust taandada:

$$\sigma^2\left(S_{n,i}\right)^{\beta}\Delta t=\left(S_{n,i+1}-S_{n,i}\right)\left(S_{n,i}-S_{n,i-1}\right). \tag{32}$$

Saime seose kolme sama sammu kohta käiva järjestikuste alusvara hinna kohta:

$$S_{n,i-1}=S_{n,i}-\frac{\sigma^2\left(S_{n,i}\right)^{\beta}\Delta t}{S_{n,i+1}-S_{n,i}}; \tag{33}$$

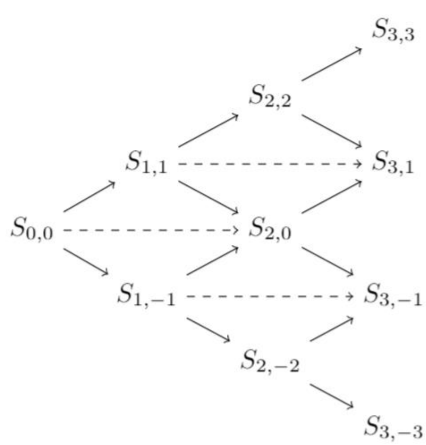
$$S_{n,i+1}=\frac{\sigma^2\left(S_{n,i}\right)^{\beta}\Delta t}{S_{n,i}-S_{n,i-1}}+S_{n,i}. \tag{34}$$

Kasutades valemit (32), saame näidata, et kui $h_{n,i}=0$, siis kaalude $h_{n,i+1}$ ja $h_{n,i-1}$ summa on 1:

$$\begin{aligned}
&h_{n,i+1}+h_{n,i-1}=\\
&=\frac{rS_{n,i}\Delta t}{S_{n,i+1}-S_{n,i-1}}+\frac{\sigma^2\left(S_{n,i}\right)^{\beta}\Delta t}{\left(S_{n,i+1}-S_{n,i-1}\right)\left(S_{n,i+1}-S_{n,i}\right)}+\frac{-rS_{n,i}\Delta t}{S_{n,i+1}-S_{n,i-1}}\\
&+\frac{\sigma^2\left(S_{n,i}\right)^{\beta}\Delta t}{\left(S_{n,i+1}-S_{n,i-1}\right)\left(S_{n,i}-S_{n,i-1}\right)}=\\
&=\frac{\sigma^2\left(S_{n,i}\right)^{\beta}\Delta t}{\left(S_{n,i+1}-S_{n,i-1}\right)}\left(\frac{1}{S_{n,i+1}-S_{n,i}}+\frac{1}{S_{n,i}-S_{n,i-1}}\right)=\\
&=\frac{\sigma^2\left(S_{n,i}\right)^{\beta}\Delta t}{\left(S_{n,i+1}-S_{n,i-1}\right)}\left(\frac{-S_{n,i-1}+S_{n,i+1}}{\left(S_{n,i+1}-S_{n,i}\right)\left(S_{n,i}-S_{n,i-1}\right)}\right)=
\end{aligned}$$

$$= \frac{\sigma^2 (S_{n,i})^\beta \Delta t}{(S_{n,i+1} - S_{n,i})(S_{n,i} - S_{n,i-1})} = \frac{(S_{n,i+1} - S_{n,i})(S_{n,i} - S_{n,i-1})}{(S_{n,i+1} - S_{n,i})(S_{n,i} - S_{n,i-1})} = 1.$$

Vaatame nüüd, kuidas leida alusvara väärtused binoompuus. Binoompuu konstrueerimisel alustame väärtusest $S_{0,0}$. Järgmisel sammul $n = 1$ on meil teada väärtus $S_{1,0} = S_{0,0}$. Hetkel ei saa me kasutada valemit (33) ega (34) sest meil on antud sammul teada vaid üks väärtus. Seega eeldame hetkel, et meil on teada väärtus $S_{1,1}$, mille arvutamiseks antud valem on tuletatud alapeatüki lõpus. Kasutades väärtuseid $S_{1,1}$ saame kasutada valemit (33), et leida väärtuse $S_{1,-1}$. Sammul $n = 2$ on meil eelnevast sammust teada 3 väärtust: $S_{2,1} = S_{1,1}, S_{2,0} = S_{1,0}$ ning $S_{2,-1} = S_{1,-1}$. Väärtuse $S_{2,2}$ arvutamiseks kasutame valemit (34) ning $S_{2,-2}$ arvutamiseks kasutame valemit (33). Sellega on olemas kõik alusvara hinnad sammul $n = 2$. Alusvara hindade arvutamine jätkub järgnevatel sammudel, kus on vaja arvutada vaid kaks väärtust: $S_{n,-n}$, kasutades valemit (33), ning $S_{n,n}$, kasutades valemit (34). Seega kasutades valemeid (33) ja (34) ning seost $S_{n,i} = S_{n-1,i}$ saame binoompuu, mis $n = 3$ puhul näeb välja nagu joonisel 4. Viimane aga eeldusel, et meil on teada $S_{1,1}$.



Joonis 4. Alusvara hinnapuu CCS meetodi puhul

Kuna alusvara väärtused on samal hinnatasemel (joonisel 4 horisontaalselt vasakult paremale) samad, siis igal sammul n lisandub alusvara väärtuste hulka vaid kaks uut väärtust, $S_{n,-n}$ ja $S_{n,n}$. Nende arvutamiseks saame kasutada valemeid (33) ja (34).

Märgime siinkohal ära, et valem (33) ei välista olukorda, kus alusvara hind võiks langeda alla nulli. Kuid teatavasti ei saa alusvara hind olla negatiivne. Lisaks ei saa valemit (33) negatiivsete alusvara hindade puhul kasutada, kui β on näiteks võrdne 0,5-ga. Kuigi seda pole meetodi autorid oma artiklis maininud, asendame negatiivse väärtuse binoompuus nulliga, nagu seda on tehtud N-R meetodi puhul valemis (27). Seega asendame valemi (33) valemiga

$$S_{n,i-1} = \max\left\{0; S_{n,i} - \frac{\sigma^2 \left(S_{n,i}\right)^{\beta} \Delta t}{S_{n,i+1} - S_{n,i}}\right\}$$

Eespool toodud valemid alusvara hinna leidmiseks ei tööta sammul $n = 1$, sest $S_{1,1}$ või $S_{-1,1}$ arvutamine vajab esimesel juhul väärtuseid $S_{0,1}$ ning $S_{-1,1}$ ja teisel juhul väärtuseid $S_{0,1}$ ja $S_{1,1}$. Sammul $n = 1$ on aga teada ainult üks väärtus, milleks on $S_{1,0} = S_{0,0}$. Seega ei saa väärtuseid $S_{1,1}$ ega $S_{1,-1}$ valemitega (33) ja (34) arvutada.

Puuduoleva väärtuse $S_{1,1}$ arvutamiseks kasutame standardse Wieneri protsessi omadust $(W(t + \Delta t) - W(t)) \sim N(0, \Delta t)$. Standardiseerides saame

$$\Delta W(t) = W(t + \Delta t) - W(t) = Z\sqrt{\Delta t}, \tag{35}$$

kus juhuslik suurus Z on standardse normaaljaotusega.

Vaatame nüüd CEV mudelit (16) üle aja Δt. Kasutades võrdust (35), saame

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S^{\frac{\beta}{2}} Z\sqrt{\Delta t}.$$

Võtame $\Delta S = S_{n+1} - \mathrm{S_n}$ ning hindame S_{n+1}:

$$S_{n+1} = S_n + \mu S_n \Delta t + \sigma S_n^{\frac{\beta}{2}} Z\sqrt{\Delta t} = S_n \left(1 + \mu \Delta t + \sigma S_n^{\frac{\beta}{2}-1} Z\sqrt{\Delta t}\right).$$

Juhusliku suuruse Z väärtus ütleb meile järgneva ajahetke alusvara väärtuse. Binoompuud ehitades soovime juhuslikkust kaotada ning vaadelda vaid konkreetseid alusvara väärtuseid. Selleks valime $Z = 1$. Kuna $\mu \Delta t$ on lõpmata väike väärtus $\sqrt{\Delta t}$ ja 1 suhtes, saame esitada

$$S_{n+1} \approx S_n \left(1 + \sigma (S_n)^{\frac{\beta}{2}-1} \sqrt{\Delta t}\right) \approx S_n e^{\sigma S_n^{\frac{\beta}{2}-1} \sqrt{\Delta t}}.$$

Viimast seost kasutades saame arvutada $n = 1$ korral väärtuse $S_{1,1}$ valemiga

$$S_{1,1} = S_{0,0} e^{\sigma S_{0,0}^{\frac{\beta}{2}-1} \sqrt{\Delta t}}. \tag{36}$$

Puuduoleva $S_{1,-1}$ väärtuse ning iga järgneva sammu väärtuse saab nüüd arvutada valemitega (33) ja (34).

2.3.2. Alusvara hinna kasvamise tõenäosus

Leiame nüüd alusvara hinna üles ja alla liikumise tõenäosused. Kasutades CCS meetodi tähiseid, muutub valem (21) kujule

$$V_{n-1,i} = e^{-r\Delta t}\left(p_{n-1,i}V_{n,i+1} + \left(1 - p_{n-1,i}\right)V_{n,i-1}\right). \tag{37}$$

Kasutame valemeid (37) ja (31). Mõlemad on valemid optsiooni $V_{n-1,i}$ hinna arvutamiseks ning eeldame seega, et need on võrdsed:

$$e^{-r\Delta t}\left(p_{n-1,i}V_{n,i+1} + \left(1 - p_{n-1,i}\right)V_{n,i-1}\right) = \frac{1}{1 + r\Delta t}\left(h_{n,i+1}V_{n,i+1} + h_{n,i}V_{n,i} + h_{n,i-1}V_{n,i-1}\right).$$

Vaatame vasakul ja paremal poolel olevaid $V_{n,i}$ kordajaid. Võrduse kehtimiseks võtame need võrdseks:

$$e^{-r\Delta t}p_{n-1,i} = \frac{1}{1 + r\Delta t}h_{n,i+1} = \frac{1}{1 + r\Delta t}\left(\frac{rS_{n,i}\Delta t}{S_{n,i+1} - S_{n,i-1}} + \frac{\sigma^2\left(S_{n,i}\right)^\beta\Delta t}{\left(S_{n,i+1} - S_{n,i-1}\right)\left(S_{n,i+1} - S_{n,i}\right)}\right).$$

Tähistame $\Delta S_i^n = S_{i+1}^n - S_i^n$. Siis

$$e^{-r\Delta t}p_{n-1,i} = \frac{1}{1 + r\Delta t}\left(\frac{rS_{n,i}\Delta t}{\Delta S_{n,i} + \Delta S_{n,i-1}} + \frac{\sigma^2\left(S_{n,i}\right)^\beta\Delta t}{\left(\Delta S_{n,i} + \Delta S_{n,i-1}\right)\Delta S_{n,i}}\right). \tag{38}$$

Binoompuu korral võtsime $h_{i,n} = 0$, mistõttu saime

$$1 - \frac{\sigma^2\left(S_{n,i}\right)^\beta\Delta t}{S_{n,i+1} - S_{n,i-1}}\left(\frac{1}{S_{n,i+1} - S_{n,i}} + \frac{1}{S_{n,i} - S_{n,i-1}}\right) = 0.$$

Kasutades siin sama tähist $\Delta S_{n,i}$, saame

$$1 = \frac{\sigma^2\left(S_{n,i}\right)^\beta\Delta t}{\Delta S_{n,i} + \Delta S_{n,i-1}}\left(\frac{1}{\Delta S_{n,i}} + \frac{1}{\Delta S_{n,i-1}}\right)$$

ehk

$$1 = \frac{\sigma^2\left(S_{n,i}\right)^\beta\Delta t}{\Delta S_{n,i}\Delta S_{n,i-1}}.$$

Avaldame viimases võrdsus suuruse Δt ning saame

$$\Delta t = \frac{\Delta S_{n,i} \Delta S_{n,i-1}}{\sigma^2 \left(S_{n,i}\right)^{\beta}}.$$

Kuna $\frac{\Delta S_{n,i}}{\sigma\left(S_{n,i}\right)^{\frac{\beta}{2}}} \approx \frac{\Delta S_{n,i-1}}{\sigma\left(S_{n,i}\right)^{\frac{\beta}{2}}}$, võime kasutada asendust

$$\Delta S_{n,i} \approx \Delta S_{n,i-1} \approx \sigma\left(S_{n,i}\right)^{\frac{\beta}{2}} \sqrt{\Delta t}.$$

Kasutame ligikaudset suurust valemis (38):

$$p_{n-1,i} = \frac{e^{r\Delta t}}{1 + r\Delta t} \left(\frac{r S_{n,i} \Delta t}{\sigma\left(S_{n,i}\right)^{\frac{\beta}{2}} \sqrt{\Delta t} + \sigma\left(S_{n,i}\right)^{\frac{\beta}{2}} \sqrt{\Delta t}} + \frac{\sigma^2 \left(S_{n,i}\right)^{\beta} \Delta t}{\left(\sigma\left(S_{n,i}\right)^{\frac{\beta}{2}} \sqrt{\Delta t} + \sigma\left(S_{n,i}\right)^{\frac{\beta}{2}} \sqrt{\Delta t}\right) \sqrt{\Delta t}} \right) =$$

$$= \frac{e^{r\Delta t}}{1 + r\Delta t} \left(\frac{r S_{n,i} \Delta t}{2\sigma\left(S_{n,i}\right)^{\frac{\beta}{2}} \sqrt{\Delta t}} + \frac{\sigma^2 \left(S_{n,i}\right)^{\beta} \Delta t}{2\sigma^2 \left(S_{n,i}\right)^{\beta} \Delta t} \right) = \frac{e^{r\Delta t}}{1 + r\Delta t} \left(\frac{1}{2} r \sqrt{\Delta t} \frac{S_{n,i}}{\sigma\left(S_{n,i}\right)^{\frac{\beta}{2}}} + \frac{1}{2} \right).$$

Analoogselt saame

$$1 - p_{n-1,i} = \frac{e^{r\Delta t}}{1 + r\Delta t} h_{n,i-1} = \frac{e^{r\Delta t}}{1 + r\Delta t} \left(-\frac{1}{2} r \sqrt{\Delta t} \frac{S_{n,i}}{\sigma\left(S_{n,i}\right)^{\frac{\beta}{2}}} + \frac{1}{2} \right).$$

Kuigi saadud $p_{n-1,i}$ ning $(1 - p_{n-1,i})$ valemite summa ei anna kokku 1, mida binoommeetod eeldaks, on nende summa väga ligilähedane ning võrdne väärtusega

$$\frac{e^{r\Delta t}}{1 + r\Delta t} \approx 1 + o(\Delta t).$$

CCS meetodil saadud optsiooni hind ei erine oluliselt, kui arvutada ka välja vaid $p_{n-1,i}$ ning kasutada saadud väärtust valemis (21) (erinevus tuleb peatükis 3 vaadeldud parameetrite korral sisse pärast 7. komakohta).

Kokkuvõttes oleme saanud alusvara hinna väärtuse üles liikumise tõenäosuseks

$$p_{n,i} = \frac{e^{r\Delta t}}{1 + r\Delta t}\left(\frac{1}{2} r\sqrt{\Delta t}\,\frac{(S_{n+1,i})^{1-\frac{\beta}{2}}}{\sigma} + \frac{1}{2}\right). \tag{39}$$

2.3.3. Näide optsiooni hinna arvutamisest CCS binoommeetodiga

Võtame taas sarnaselt punktile 2.2.2. alusvara väärtuseks optsiooni ostmise hetkel $S_{0,0} = 1$, optsiooni täitmisajaks $T = \frac{1}{2}$ ning sammude arvuks 2 $\left(\Delta t = \frac{1}{4}\right)$. Olgu $r = 0{,}05$, $\sigma = 0{,}2$ ning valime $\beta = 1$.

Teame, et $S_{1,0} = S_{0,0} = 1$. Leiame esiteks väärtuse $S_{1,1}$ kasutades valemit (36):

$$S_{1,1} = S_{0,0} e^{\sigma (S_{0,0})^{\frac{\beta}{2}-1}\sqrt{\Delta t}} = 1{,}1052.$$

Edasi leiame väärtuse $S_{1,-1}$ kasutades valemit (33):

$$S_{1,-1} = S_{1,0} - \frac{\sigma^2 S_{1,0}^{\beta} \Delta t}{S_{1,1} - S_{1,0}} = 0{,}9049.$$

Sellega on esimene samm tehtud ning alusvara väärtused ajahetkel $t = \frac{1}{4}$ teada.

Teise sammu puhul teame, et $S_{2,0} = S_{1,0} = 1$, $S_{2,1} = S_{1,1} = 1{,}1052$ ning $S_{2,-1} = S_{1,-1} = 0{,}9049$. Leiame $S_{2,2}$ ja $S_{2,-2}$ kasutades vastavalt valemeid (33) ja (34):

$$S_{2,2} = \frac{\sigma^2 S_{2,1}^{\beta} \Delta t}{S_{2,1} - S_{2,0}} + S_{2,1} = 1{,}2103,$$

$$S_{2,-2} = S_{2,-1} - \frac{\sigma^2 S_{2,-1}^{\beta} \Delta t}{S_{2,0} - S_{2,-1}} = 0{,}8097.$$

Seega on ajahetkeks T binoompuus võimalikud alusvara väärtused $1{,}2103$, 1 või $0{,}8097$.

Kui soovime hinnata Euroopa müügioptsiooni täitmishinnaga $E = 1$, siis alustame viimasest sammust ja rakendame igale alusvara hinnale väljamaksefunktsiooni

$$P(S_T) = \max\{E - S_T; 0\}.$$

Saame, et ajahetkel $T = 1/2$ on optsiooni hinnaks 0, 0 või 0,1903.

Liikudes sammu võrra tagasi, leiame esmalt tõenäosused, kasutades valemit (39):

$$p_{1,1} = \frac{e^{r\Delta t}}{1 + r\Delta t}\left(\frac{1}{2} r\sqrt{\Delta t}\frac{\left(S_{2,1}\right)^{1-\frac{\beta}{2}}}{\sigma} + \frac{1}{2}\right) = 0{,}5657,$$

$$p_{1,-1} = \frac{e^{r\Delta t}}{1 + r\Delta t}\left(\frac{1}{2} r\sqrt{\Delta t}\frac{\left(S_{2,-1}\right)^{1-\frac{\beta}{2}}}{\sigma} + \frac{1}{2}\right) = 0{,}5595.$$

Nüüd saame leida optsiooni hinnad valemiga (37):

$$V_{1,1} = e^{-r\Delta t}\left(p_{1,1}V_{2,2} + \left(1 - p_{1,1}\right)V_{2,0}\right) = 0,$$
$$V_{1,-1} = e^{-r\Delta t}\left(p_{1,-1}V_{2,0} + \left(1 - p_{1,-1}\right)V_{2,-2}\right) = 0{,}0849.$$

Viimaks leiame tõenäosuse

$$p_{0,0} = \frac{e^{r\Delta t}}{1 + r\Delta t}\left(\frac{1}{2} r\sqrt{\Delta t}\frac{\left(S_0^1\right)^{1-\frac{\beta}{2}}}{\sigma} + \frac{1}{2}\right) = 0{,}5625$$

ning optsiooni hinna ajal $t = 0$

$$V_{0,0} = e^{-r\Delta t}\left(p_{0,0}V_{1,1} + \left(1 - p_{0,0}\right)V_{1,-1}\right) = 0{,}0376.$$

Näeme, et punktis 2.2.2. saadud optsiooni hind 0,0398 on suhteliselt ligilähedane CCS meetodi ning sama parameetritega saadud optsiooni hinnale, kuigi N on valitud väga väike. Võiks arvata, et mõlemad meetodid hindavad optsioone sarnaselt. Põhjalikum analüüs kahe meetodi võrdluseks on toodud järgnevas peatükis 3.

3. Numbrilised eksperimendid ja CCS meetodi modifikatsioonid

3.1. Euroopa müügioptsiooni hindamine CCS ning N-R meetoditega

Alustame kahe meetodi võrdlust analüütilise ehk täpse optsiooni hinnaga, vaadates Euroopa müügioptsioone samade parameetritega, nagu seda on teinud Choe, Chu ning Shin oma meetodi loomisel.

Olgu optsiooni täitmishind $E = 1$, riskivaba intress $r = 0{,}05$, volatiilsuse parameeter $\sigma = 0{,}2$. Vaatleme hindu, kus optsiooni täitmisaeg $T \in \{1/4; 1/2; 1\}$, alusvara alghind $S_0 \in \{0{,}5; 1; 1{,}5\}$, CEV mudeli parameeter $\beta \in \{0{,}5; 1; 2\}$. Arvutame optsioonide hinnad sammude hulkadega $N = 365$ ning $N = 365 \cdot 2 (= 730)$. Märgime ära, et N-R meetod optsiooni hinna arvutamiseks ei tööta, kui $\beta = 2$, sest valemites (26) ning (27) tekiks siis nulliga jagamine. N-R meetodi asemel on $\beta = 2$ puhul kasutatud CRR meetodit valemitega (20), sest nagu mainitud on $\beta = 2$ korral CEV mudel võrdne Black-Scholes mudeliga. Saadud optsiooni hinnad on välja toodud tabelis 1. Väärtuste leidmisel kasutatud programmi koodi võib leida lisadest 1-4.

Enne tulemuste analüüsimist teeme mõned märkused.

1) Arvutuste käigus tuli CCS meetodis ette olukordi, kus alusvara hind langes vastavalt valemile (33) negatiivseks, mille järgselt sai vastav alusvara hind binoompuus asendatud nulliga. Sama on tehtud N-R meetodis, nagu kirjeldab valem (27).
2) Üldjoontes kattuvad saadud optsiooni hinnad CCS meetodi autorite poolt saadud hindandega. Erandiks on olukord, kus $\beta = 1, T = 1/4, n = 730$. Arvatavasti on meetodi autorid teinud andmete sisestamisel vea, sest alternatiivselt teeks optsiooni hind sammude suurenemisel 365-lt 730-ni tavapäratult suure hüppe.
3) Viidetes kasutatavast materjalist võib leida veidi erineva kujuga analüütilise valemi. Seetõttu võib analüütiline lahend veidi erineda, kui kasutada mõnda muud allikat. Tabelis 1 toodud optsiooni hinnad on saadud, kasutades valemit (19), mis pärineb CCS artiklist [2]. Erinevus on aga väga väike ning analüüsi järeldusi ei mõjuta.
4) CCS meetodit kirjeldavas artiklis välja toodud analüütilised väärtused optsiooni hindadele olukorras, kus $T = 1$, ei kattu tabelis 1 toodud väärtustega, mis on saadud kasutades valemit (19).

Tabel 1. Müügioptsioonide hinnad. $E = 1;\ r = 0{,}05;\ \sigma = 0{,}2$.

	S_0	T	Analüütiline lahend	CCS meetod $N = 365$	CCS meetod $N = 730$	N-R/CRR meetod $N = 365$	N-R/CRR meetod $N = 730$
$\beta = 0{,}5$	0,5	1/4	0,4876	0,4858	0,4858	0,4876	0,4876
		1/2	0,4753	0,4718	0,4718	0,4753	0,4753
		1	0,4516	0,4446	0,4447	0,4516	0,4516
	1	1/4	0,0337	0,0332	0,0332	0,0338	0,0337
		1/2	0,0442	0,0432	0,0431	0,0443	0,0442
		1	0,0558	0,0538	0,0538	0,0559	0,0558
	1,5	1/4	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
		1/2	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
		1	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
$\beta = 1$	0,5	1/4	0,4876	0,4851	0,4851	0,4876	0,4876
		1/2	0,4753	0,4704	0,4704	0,4753	0,4753
		1	0,4514	0,4416	0,4417	0,4514	0,4514
	1	1/4	0,0337	0,0326	0,0326	0,0338	0,0337
		1/2	0,0442	0,0422	0,0422	0,0442	0,0442
		1	0,0558	0,0520	0,0519	0,0558	0,0557
	1,5	1/4	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
		1/2	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
		1	0,0004	0,0003	0,0003	0,0004	0,0004
$\beta = 2$	0,5	1/4	0,4876	0,4851	0,4851	0,4876	0,4876
		1/2	0,4753	0,4703	0,4703	0,4753	0,4753
		1	0,4513	0,4412	0,4412	0,4513	0,4513
	1	1/4	0,0337	0,0316	0,0316	0,0338	0,0337
		1/2	0,0442	0,0403	0,0403	0,0442	0,0442
		1	0,0557	0,0488	0,0488	0,0558	0,0557
	1,5	1/4	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
		1/2	0,0001	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001
		1	0,0009	0,0007	0,0007	0,0009	0,0009

Tabelit vaadates on esimene ning ehk kõige olulisem tähelepanek, et CCS hindab optsiooni ebatäpsemalt, kui seda teeb N-R (või CRR) meetod. Kui CCS meetodi kaudu saadud vastus on ligilähedane (~2 komakohta), siis valitud parameetrite korral on N-R meetod siiski täpsem.

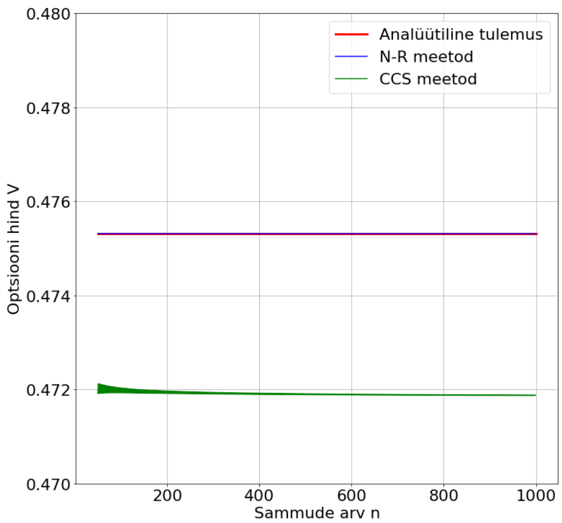
Teiseks paneme tähele, kui võrrelda $N = 365$ ning $N = 730$ korral saadud hindu meetodi siseselt samadel parameetritel, siis näeme, et need teineteisest praktiliselt ei erine. See võiks viidata sellele, et juba $N = 365$ korral on saavutatud ligi nelja komakohaline täpsus alusvara optsioonile antud parameetritel ning N-i veelgi suurendades ei lähene CCS meetodi vastus analüütilisele väärtusele lähemale.

Samas tuleb ära märkida, et binoommeetodi kaudu saadud optsiooni hinna koondumine ei toimu monotoonselt, vaid see toimub võngetena, mida on ka näha näiteks joonistel 6 ja 8.

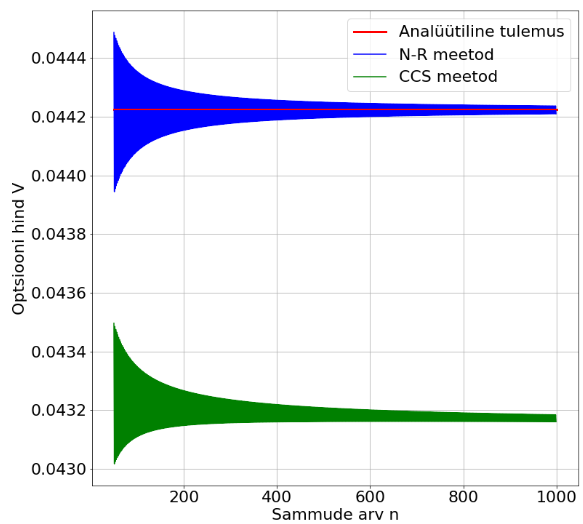
Lisaks märgime ära, et kuigi N-R meetodi kaudu saadud hind on optsiooni täpsele hinnale lähemal, siis nende arvutamine võtab märgatavalt kauem aega, sest alusvara hindade arvutamisel tuleb teha lisaarvutusi $J_u(x)$ ning $J_d(x)$ näol ning nii N-R meetod kui ka CRR meetod tahavad tõenäosuse arvutamisel (valemid (20) ja (30)) kontrolli, et nimetaja ei oleks võrdne nulliga. Säärane olukord võib tekkida suuremate n-de korral, kus negatiivsed alusvarade hinnad on asendatud nullidega. Tänu sellele töötab lisades toodud programmidega arvutamine CCS meetodi puhul sama N korral mitu korda kiiremini. Seega sama ajaga saaks CCS meetodi puhul arvutada optsiooni hinna, kasutades suuremat n-i ning seetõttu saada täpsema tulemuse. Viimane aga kehtib vaid siis, kui CCS meetod koondub analüütiliseks optsiooni hinnaks.

3.2. CCS ning N-R meetodite koondumine

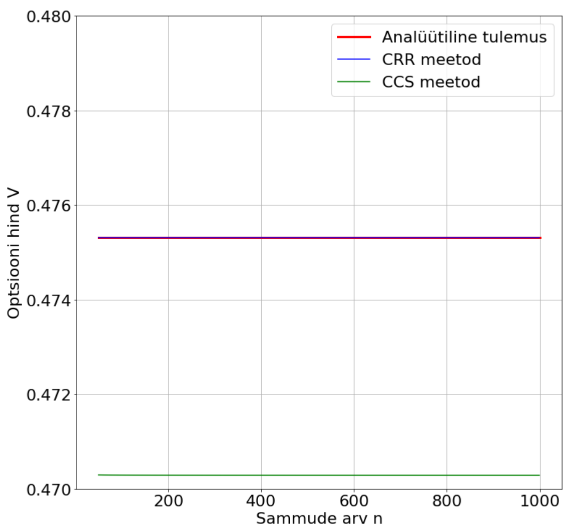
Vaatame Euroopa müügioptsiooni hinna koondumist CCS ning N-R meetodite puhul, kus võtame parameetriteks $E = 1$, $T = 1/2$, $\sigma = 0.2$, $r = 0.05$, $\beta \in \{0,5; 2\}$, $S_0 \in \{0,5; 1\}$ ning teeme joonise, kus sammude arvuks on väärtused $N \in \{50; 51; \ldots; 1000\}$. Saadud tulemused on joonistel 5-8.



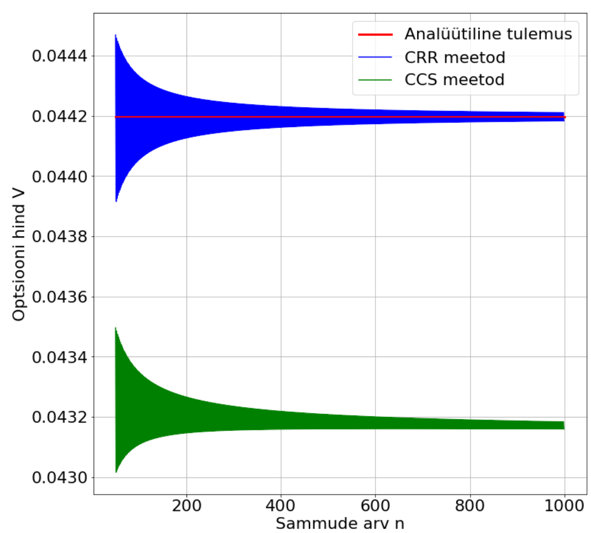
Joonis 5. CCS ja N-R meetodite koondumine.
$\beta = 0{,}5;\ S_0 = 0{,}5.$



Joonis 6. CCS ja N-R meetodite koondumine.
$\beta = 0{,}5;\ S_0 = 1.$



Joonis 7. CCS ja CRR meetodite koondumine.
$\beta = 2;\ S_0 = 0{,}5.$



Joonis 8. CCS ja CRR meetodite koondumine.
$\beta = 2;\ S_0 = 1.$

Joonistelt on näha, et N-R ning CRR meetodid koonduvat täpseks optsiooni hinnaks, kuid CCS meetod seda ei tee. Joonisel 7 on analüütiline hind ning CRR tulemused üksteise peal nii, et neid on visuaalselt võimatu eristada. Näeme küll joonistelt 5 ning 7, et CCS meetod koondub väga kiiresti, kuid sellest ei ole kasu, kui koondumine toimub analüütilisest optsiooni hinnast erinevaks väärtuseks. Joonistel 6 ning 8 on selgelt näha, et koondumine ei toimu ühelgi kirjeldatud meetodist monotoonselt, mistõttu täpsema optsiooni hinna saamiseks peaks vaatama mitte üksikut väärtust konkreetsel N-l, vaid mingit hinnavahemiku keskmist mitme ligilähedase N-i väärtuse puhul.

3.3. CCS meetodi modifikatsioonid

Tabelist 1 ning joonistelt 5-8 on näha, et CCS ja N-R meetodi vahel valides peaks täpse hinnangu saamiseks kindlasti valima N-R meetodi ning CCS meetodi rakendamiseks tuleb seda parandada.

Võrreldes kahte läbitehtud näidet alapunktides 2.2.2. ning 2.3.4., siis paneme tähele, et alusvara hinnad binoompuus on suhteliselt sarnased ning suuremad erinevused tulevad sisse tõenäosuste arvutamisel. Sama kehtib ka suuremate hinnapuude võrdlemisel.

Seetõttu, jättes samaks CCS meetodi alusvara hindade arvutamise valemitest (33), (34) ning (36), pakume välja kaks tõenäosuse arvutamise modifikatsiooni CCS meetodi korral tõenäosuse $p_{n,i}$ arvutamiseks.

3.3.1. I modifikatsioon

CCS meetodi tõenäosuse tuletuskäigus on kasutatud ligikaudset hinnangut

$$\frac{\Delta S_i^n}{\sigma\left(S_{n,i}\right)^{\frac{\beta}{2}}} \approx \sqrt{\Delta t},$$

mis võib põhjustada vea optsiooni hinna arvutamises. Selle asemel kasutame valemit (38), mis sisaldab endas väärtust $h_{n,i+1}$. Kui alusvara hinnad binoompuus on arvutatud, siis saab välja arvutada ka $h_{n,i+1}$ väärtuse, millest tuletame uue valemi tõenäosuse arvutamiseks:

$$p_{n,i} = \frac{e^{r\Delta t}}{1 + r\Delta t}\left(\frac{rS_{n+1,i}\Delta t}{\Delta S_{n+1,i} + \Delta S_{n+1,i-1}} + \frac{\sigma^2\left(S_{n+1,i}\right)^{\beta}\Delta t}{\left(\Delta S_{n+1,i} + \Delta S_{n+1,i-1}\right)\Delta S_{n+1,i}}\right).$$

Tabelis 2 on arvutatud Euroopa müügioptsiooni hinnad parameetrite väärtustel $E = 1$, $\sigma = 0{,}2$, $r = 0{,}05$, $\beta \in \{0{,}5; 1; 2\}$, $S_0 \in \{0{,}5; 1\}$, $T \in \{1/4;\ 1/2; 1\}$ ning $N \in \{365; 730\}$. Kasutatud on CCS meetodi I modifikatsiooni ning N-R meetodit, kui $\beta \in \{0{,}5; 1\}$ ning CRR meetodit, kui $\beta =$

2. Lisaks on toodud analüütiline lahend, millega saab saadud tulemusi võrrelda. Programmi, mida kasutati I modifikatsiooni rakendamiseks, võib leida lisast 5.

Tabeli 2 põhjal saame järeldada, et CCS meetodi I modifikatsioon hindab originaalse CCS meetodiga võrreldes optsiooni hinda täpsemini ning saadud tulemust saab võrrelda N-R või CRR meetodiga. Üleüldse on erinevate meetodite kaudu saadud optsioonide hinnad teineteisega kuni 5. komakohani võrdsed. Kui vaadata optsioone, mille puhul S_0 on väiksem, kui täitmishind E, siis kogu tabeli ulatuses on hinnad antud N-i väärtuste korral täpsemad, kui seda on optsioonid, mille täitmishind on alusvara hinnaga ajahetkel $t = 0$.

Tabel 2. I modifikatsiooni vs N-R/CRR müügioptsioonide hinnad. $E = 1$; $r = 0{,}05$; $\sigma = 0{,}2$.

	S_0	T	Analüütiline lahend	CCS meetodi I mod.		N-R/CRR meetod	
				$N = 365$	$N = 730$	$N = 365$	$N = 730$
$\beta = 0{,}5$	0,5	1/4	0,487578	0,487578	0,487578	0,487578	0,487578
		1/2	0,475313	0,475314	0,475314	0,475314	0,475314
		1	0,451583	0,451580	0,451582	0,451580	0,451582
	1	1/4	0,033737	0,033763	0,033724	0,033763	0,033723
		1/2	0,044224	0,044259	0,044204	0,044259	0,044204
		1	0,055810	0,055856	0,055783	0,055855	0,055783
$\beta = 1$	0,5	1/4	0,487578	0,487578	0,487578	0,487578	0,487578
		1/2	0,475311	0,475311	0,475311	0,475311	0,475311
		1	0,451394	0,451393	0,451393	0,451393	0,451393
	1	1/4	0,033732	0,033758	0,033718	0,033758	0,033718
		1/2	0,044209	0,044245	0,044190	0,044245	0,044190
		1	0,055768	0,055815	0,055742	0,055815	0,055741
$\beta = 2$	0,5	1/4	0,487578	0,487578	0,487578	0,487578	0,487578
		1/2	0,475310	0,475310	0,475310	0,475310	0,475310
		1	0,451253	0,451254	0,451254	0,451253	0,451253
	1	1/4	0,033728	0,033754	0,033714	0,033754	0,033714
		1/2	0,044197	0,044234	0,044178	0,044233	0,044178
		1	0,055735	0,055784	0,055708	0,055783	0,055708

3.3.2. II modifikatsioon

Leiame CCS meetodis $p_{n,i}$, kasutades riskineutraalse tõenäosuse valemit (20). Silmas tuleb pidada, et kui CRR meetodis on tehtud eeldus konstantse volatiilsuse kohta, siis CEV mudelis see nii ei ole. Seetõttu u ja d väärtused, mis vastavad järgmise sammu alusvara tõusu ja kahanemise väärtustele, muutuvad ajas. Uued u ja d väärtused saame vastavalt suhetest $S_{n+1,i+1}/S_{n,i}$ ning $S_{n+1,i-1}/S_{n,i}$. Seega saame II modifikatsiooni tõenäosuse valemiks:

$$p_{n,i} = \frac{e^{r\Delta t} - S_{n+1,i-1}/S_{n,i}}{S_{n+1,i+1}/S_{n,i} - S_{n+1,i-1}/S_{n,i}}.$$

Tabel 3. II modifikatsiooni vs N-R/CRR müügioptsioonide hinnad. $E = 1;\ r = 0{,}05;\ \sigma = 0{,}2$.

	S_0	T	Analüütiline lahend	CCS meetodi II mod.		N-R/CRR meetod	
				$N = 365$	$N = 730$	$N = 365$	$N = 730$
$\beta = 0{,}5$	0,5	1/4	0,487578	0,487578	0,487578	0,487578	0,487578
		1/2	0,475313	0,475313	0,475313	0,475314	0,475314
		1	0,451583	0,451578	0,451581	0,451580	0,451582
	1	1/4	0,033737	0,033763	0,033723	0,033763	0,033723
		1/2	0,044224	0,044259	0,044204	0,044259	0,044204
		1	0,055810	0,055855	0,055783	0,055855	0,055783
$\beta = 1$	0,5	1/4	0,487578	0,487578	0,487578	0,487578	0,487578
		1/2	0,475311	0,475311	0,475311	0,475311	0,475311
		1	0,451394	0,451391	0,451393	0,451393	0,451393
	1	1/4	0,033732	0,033758	0,033718	0,033758	0,033718
		1/2	0,044209	0,044244	0,044190	0,044245	0,044190
		1	0,055768	0,055814	0,055741	0,055815	0,055741
$\beta = 2$	0,5	1/4	0,487578	0,487578	0,487578	0,487578	0,487578
		1/2	0,475310	0,475310	0,475310	0,475310	0,475310
		1	0,451253	0,451253	0,451253	0,451253	0,451253
	1	1/4	0,033728	0,033754	0,033714	0,033754	0,033714
		1/2	0,044197	0,044233	0,044178	0,044233	0,044178
		1	0,055735	0,055783	0,055708	0,055783	0,055708

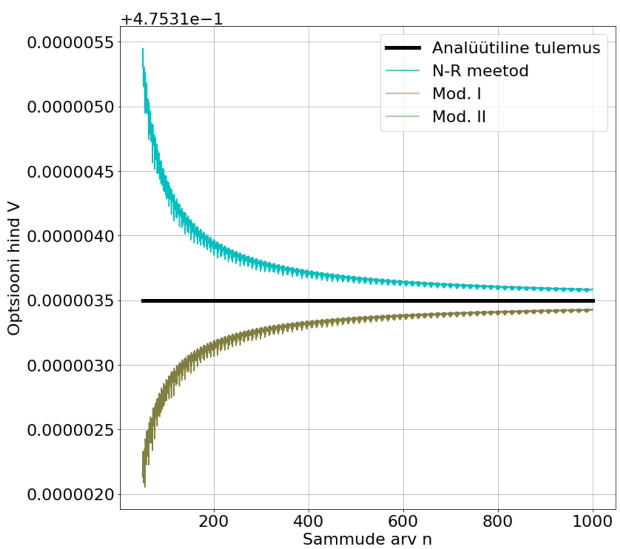
Loome sarnase tabeli nagu I modifikatsiooni jaoks, kus arvutame Euroopa müügioptsiooni hinna V, kui $E = 1$, $\sigma = 0{,}2$, $r = 0{,}05$, $\beta \in \{0{,}5; 1; 2\}$, $S_0 \in \{0{,}5; 1\}$, $T \in \{1/4;\ 1/2; 1\}$ ning $N \in \{365; 730\}$. Vastavad optsiooni hinnad on toodud tabelis 3. Vastav programmi II modifikatsiooni rakendamiseks võib leida lisast 6.

Saame teha samad järeldused, mis tabeli 2 põhjal. II modifikatsioon hindab optsiooni hinda täpsemini kui originaalne CCS meetod ning CCS meetodi II modifikatsiooni kaudu saadud optsiooni hinnad on kuni 5. komakohani võrdsed N-R või CRR meetodi tulemustega.

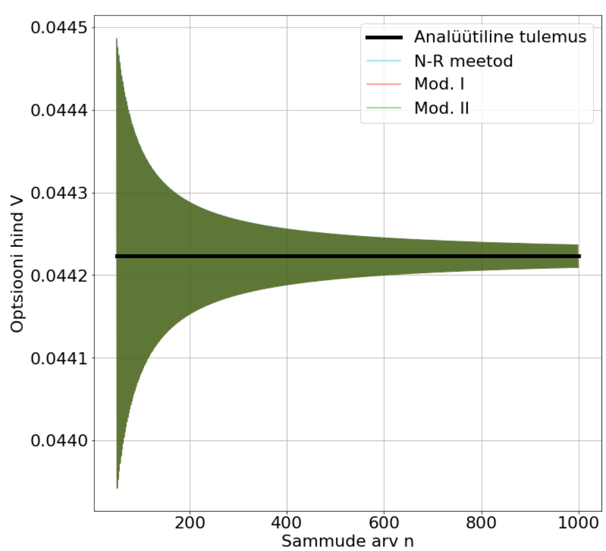
3.3.3. CCS meetodi modifikatsioonide koondumine võrreldes N-R meetodiga

Kui võrrelda tabelites 2 ja 3 CCS modifikatsioonide poolt saadud optsiooni hindasid, siis need on teineteisele väga lähedased ning erinevusi on märgata alles 6. komakoha juures. Seetõttu vaatame meetodite koondumist täpseks väärtuseks, et osata meetodeid omavahel paremini hinnata.

Joonistel 9-12 on välja toodud CCS meetodi I ja II modifikatsiooni ning N-R või CRR meetodi koondumine analüütiliseks väärtuseks, kui $E = 1$, $T = 1/2$, $\sigma = 0.2$, $r = 0.05$, $\beta \in \{0{,}5; 2\}$, $S_0 \in \{0{,}5; 1\}$ ning $N \in \{50; 51; \dots; 1000\}$.

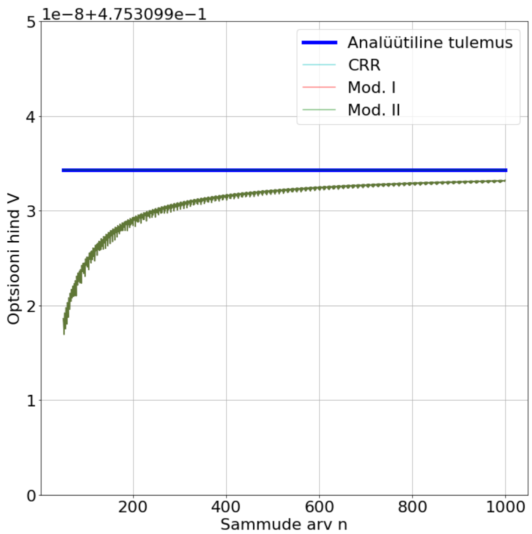


Joonis 9. CCS mod. I, II ja N-R koondumine. $\beta = 0{,}5;\ \ S_0 = 0{,}5.$

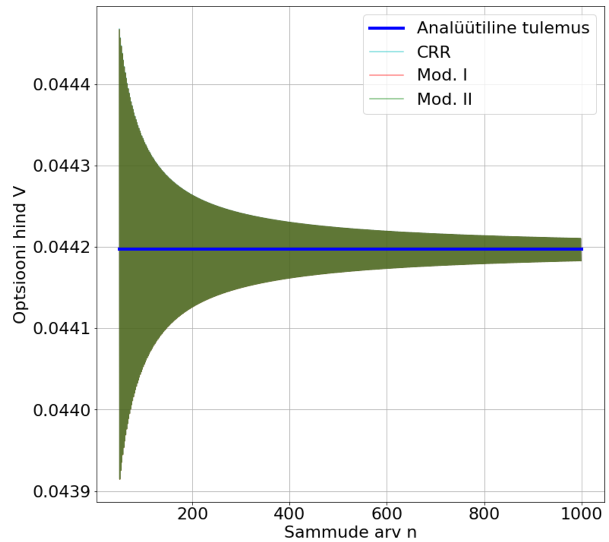


Joonis 10. CCS mod. I, II ja N-R koondumine. $\beta = 0{,}5;\ S_0 = 1.$

Jooniste 9 ja 10 põhjal võime väita, nii N-R meetod kui ka CCS modifitseeritud meetod koonduvad sarnaselt. Joonisel 9 on näha, et N-R ülehindab veidi optsiooni väärtust ning CCS modifikatsioonid kattuvad ja alahindavad optsiooni väärtust. Tundub, et modifitseeritud meetodil saadud optsiooni väärtused koonduvad analüütiliseks optsiooni hinnaks veidi kiiremini. Eksimused aga optsiooni hindamisel on minimaalsed ning ulatuvad alles 6. komakohani. Joonisel 10 kattuvad kõik kolm meetodit ning ostsilleerib, jõudes optsiooni täpse hinna mõlemale poole. Vead optsiooni hindamisel antud parameetrite korral on aga natuke suuremad ning ulatuvad kolmanda komakohani.



Joonis 11. CCS mod. I, II ja N-R koondumine. $\beta = 2;\ S_0 = 0{,}5$.



Joonis 12. CCS mod. I, II ja N-R koondumine. $\beta = 2;\ S_0 = 1$.

Joonised 11 ning 12 sarnanevad vägagi joonistele 9 ja 10. Joonisel 11 näeme taas, et CCS meetodi modifikatsioonid alahindavad optsiooni väärtust ning sama teeb ka CRR meetod. Tehtud viga võrreldes täpse optsiooni hinnaga on väga väike, ulatudes 7. komakohani. Joonis 12 sarnaneb ka väga joonisele 10, kus kõigi kolme meetodi tulemused kattuvad ning sõltuvalt N-i väärtusest võib antud meetoditega saadud optsiooni hind olla täpsest hinnast nii suurem kui ka väiksem.

Vaatame ka Euroopa ostuoptsioonide väärtuseid CCS modifikatsioonide ning N-R meetodite korral. Olgu $E = 100$, $r = 0{,}05$, $\sigma = 0{,}3$, $\beta \in \{1; 1{,}5\}$, $S_0 \in \{100; 120\}$, $T \in \{1/2; 1\}$ ning $N = 730$. Võrdluseks on välja toodud ka vastava optsiooni analüütiline väärtus. Tulemused on toodud tabelis 3.

Tabelist näeme, et kõik kolm meetodit hindavad antud parameetrite korral ostuoptsioone üpris täpselt, kuid mitte nii täpselt, kui seda oli näha tabelis 2 ning 3. Arvatavasti mõjutab täpsust kordades suurem S_0 ning E, mis muudavad ka optsiooni hinna suurusjärku. Ainus erinevus, mida tabelis meetodite vahel on näha, on $\beta = 1{,}5$ ning $S_0 = 100$ korral saadud optsiooni hinnad, kus N-R meetod saab veidi suurema tulemuse ning kaldub ka analüütilisest väärtusest veidi mööda. CCS modifikatsioone I ning II pole väga võimalik teineteisest eristada, sest nende meetoditega saadud optsiooni hind on iga parameetrite komplekti korral väga ligilähedane ning ühe hinnang teisest ei ole üle kogu tabeli parem. Arvatavasti esineb antud N-i väärtusel veel suhteliselt laiali ulatuvat koondumist täpseks väärtuseks.

Tabel 4. I ja II modifikatsioon ning N-R ostuoptsioonide hinnad.
$E = 100;\ r = 0{,}05;\ \sigma = 0{,}3;\ n = 730.$

β	S_0	T	Analüütiline	CCS mod. I	CCS mod. II	N-R
1	100	1/2	2,5918	2,5917	2,5918	2,5917
		1	4,9351	4,9347	4,9349	4,9347
	120	1/2	22,4690	22,4690	22,4690	22,4690
		1	24,8771	24,8769	24,8771	24,8771
1,5	100	1/2	4,0585	4,0592	4,0593	4,0598
		1	6,6302	6,6309	6,6310	6,6316
	120	1/2	22,4705	22,4705	22,4705	22,4705
		1	24,8966	24,8963	24,8965	24,8964

3.4. Ameerika optsiooni hindamine

Kuna originaalne CCS meetod ei osutunud kuigi edukaks Euroopa optsioonide hindamisel, kasutame Ameerika optsioonide hindamisel vaid CCS meetodite modifikatsioone ning N-R meetodit. Võrdleme kolme meetodit ning vaatame nende koondumist.

Alustame tabelist 5, kus on arvutatud Ameerika optsiooni väärtus, kasutades CCS meetodi I ja II modifikatsiooni ning N-R meetodi binoompuud koos optsiooni hinna arvutamiseks alapeatükis 2.1. kirjeldatud meetodit koos valemiga (22). Hinnatud on Ameerika müügioptsiooni, parameetrite väärtuseks on võetud $E = 40$, $T = 1/3$, $r = 0{,}05$, $N \in \{50;\ 730\}$, $\beta \in \{1;\ 1{,}75\}$, $S_0 \in \{35; 40; 45\}$ ning

$$\sigma = \frac{40\sigma'}{S_0^{\beta/2}},$$

kus $\sigma' \in \{0{,}2; 0{,}3; 0{,}4\}$. Parameetrid on võetud selliselt, et neid saaks võrrelda Nelson, Ramaswamy artiklis [10] toodud tabeliga. Lisaks on tabelis 5 välja toodud nimetatud artiklist pärit lõpliku diferentsmeetodiga saadud väärtus (PDE), mis aitab binoommeetodil saadud tulemusi võrrelda, kuid tegemist ei ole optsiooni analüütiliselt täpse väärtusega.

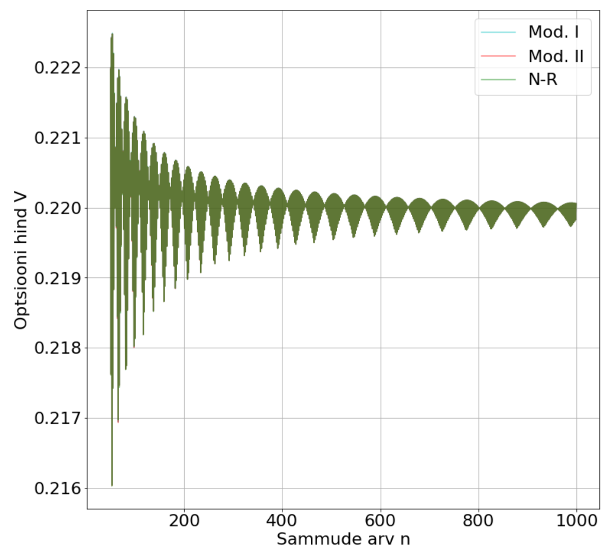
Märgime ära, et Nelson, Ramaswamy artikli väärtused ning tabelis 5 toodud väärtused N-R meetodi kohta ($N = 50$) on ligikudu võrdsed.

Tabel 5. Ameerika ostuoptsiooni hindamine CCS meetodi modifikatsioonide ning N-R meetodiga. $E = 40$; $r = 0{,}05$; $T = 1/3$.

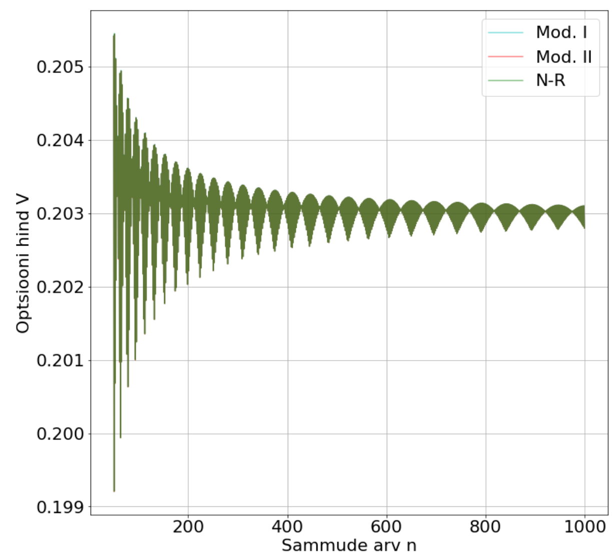
			PDE	CCS mod. I		CCS mod. II		N-R	
β	σ'	S_0		$n = 50$	$n = 730$	$n = 50$	$n = 730$	$n = 50$	$n = 730$
1	0,2	45	0,223	0,222	0,2201	0,222	0,2201	0,222	0,2201
		40	1,570	1,581	1,5729	1,581	1,5729	1,581	1,5729
		35	5,060	5,082	5,0818	5,082	5,0818	5,082	5,0818
	0,3	45	0,751	0,744	0,7482	0,744	0,7482	0,743	0,7482
		40	2,470	2,488	2,4751	2,488	2,4751	2,488	2,4751
		35	5,628	5,668	5,6718	5,668	5,6718	5,667	5,6718
	0,4	45	1,430	1,443	1,4285	1,443	1,4285	1,443	1,4285
		40	3,374	3,398	3,3802	3,398	3,3802	3,398	3,3802
		35	6,395	6,462	6,4494	6,462	6,4494	6,462	6,4494
1,75	0,2	45	0,203	0,205	0,2029	0,205	0,2029	0,205	0,2029
		40	1,571	1,583	1,5743	1,583	1,5743	1,583	1,5743
		35	5,078	5,103	5,1044	5,103	5,1044	5,103	5,1044
	0,3	45	0,706	0,706	0,7080	0,706	0,7080	0,706	0,7080
		40	2,471	2,490	2,4767	2,490	2,4767	2,490	2,4767
		35	5,680	5,729	5,7313	5,729	5,7313	5,729	5,7313
	0,4	45	1,359	1,380	1,3669	1,380	1,3669	1,380	1,3669
		40	3,374	3,400	3,3815	3,399	3,3815	3,400	3,3815
		35	6,472	6,547	6,5361	6,547	6,5361	6,547	6,5361

Tabelist on näha, et kõik meetodid tunduvad töötavat ning hindavad optsiooni hinda sarnaselt. Kuna ameerika optsioonil hindamiseks puudub analüütiline lahend, siis ei saa me ütelda, milline väärtus on õige. Näeme, et modifikatsioonid ning N-R meetodid on taaskord väga sarnaste väärtustega.

Joonised 13 ning 14 aitavad hinnata meetodite koondumiskiirust. Antud joonistel on hinnatud Ameerika müügioptsiooni ning parameetriteks on valitud $E = 40$, $S_0 = 45$, $r = 0{,}05$, $T = 1/3$, $\sigma' = 0{,}2$, $\beta \in \{1; 1{,}75\}$ ning $N \in \{50; 51; \dots; 1000\}$.



Joonis 13. CCS mod. I, II ja N-R koondumine. $\beta = 1$



Joonis 14. CCS mod. I, II ja N-R koondumine. $\beta = 1{,}75$

Mõlemal joonisel 13 ning 14 kattuvad saadud optsiooni väärtused ning antud skaalal pole neid võimalik eristada. Seega antud jooniste põhjal saab väita, et pole vahet, millise meetodiga optsiooni väärtuseid arvestada. Koondumiskiirus ning hinnang optsioonile on kõigil kolmel meetodil sama. Et saada suhteliselt täpset optsiooni väärtust, peaks valima $N > 500$. Märgime siinkohal ka ära, et kui tabeli 4 PDE väärtus langeb joonisel 14 koonduva väärtusega (joonise 14 parameetritel on PDE väärtus $0{,}203$), siis joonise 13 puhul on PDE väärtus erinev (vastavatel parameetritel on PDE väärtus $0{,}223$).

Kokkuvõttes võime öelda, et Nelson-Ramaswamy binoommeetod optsioonide hindamiseks töötab, kuid Choe-Chu-Shin meetod mitte, sest meetodiga saadud Euroopa optsiooni hinnad ei koondu täpseks väärtuseks. Küll aga töötavad kaks välja pakutud CCS meetodi modifikatsiooni, mis töötavad N-R meetodiga üldjoontes sama efektiivselt. Olulist vahet modifikatsioonidel pole, sest saadud optsioonide hinnad on teineteisele väga lähedased.

CCS modifikatsioonide ning N-R meetodi kaudu hinnatud Ameerika optsioonid koonduvad samaks väärtuseks ning graafikutelt pole võimalik vahet teha meetodite koondumise kiirusel. Suhtelistelt täpsete optsioonide hindade saamiseks on nimetatud meetodite korral soovituslik võtta $N > 500$, sest enne seda toimub vaadeldud parameetrite korral hinna suhteliselt suur ostsilleerimine. Sobilik N valik sõltub kindlasti ka parameetritest ning optsiooni hinna mittemonotoonsele koondumisele on mõistlik vaadata mitut teineteisele lähedal olevate N-i väärtuse korral arvutatud optsiooni väärtust, et saada optsiooni väärtusele mingi vahemik.

Viited

[1] Z. Bodie, A. Kane, A. J. Marcus. *Investments.* McGraw Hill Education, Tenth Edition, lk 8-9, 2014.

[2] H. J. Choe, J. H. Chu, S. J. Shin. *Recombining binomial tree for constant elasticity of variance process.* Yonsei University, 2014.

[3] J. Cox. *Notes on Option Pricing I: Constant Elasticity of Diffusions*. Stanford University, 1975.

[4] J. C. Cox, S. A. Ross, M. Rubinstein. *Options Pricing: A Simplified Approach*. Journal of Financial Economics, 7, lk 229-263, 1979.

[5] E. Derman, M. B. Miller. *The Volatility Smile.* Wiley, lk 163-174, 2016.

[6] E. Fama. *Efficient Capital Markets: A Review of the Theory and Empirical Work*. Journal of Finance, Vol. 25 (2), lk 383-417, 1970.

[7] J. C. Hull. *Options, Futures and Other Derivatives.* Pearson Education, Fifth Edition, lk 200-266, 2002.

[8] R. Kangro. *Computational Finance.* Tartu Ülikool, lk 25-38, 2018.

[9] Y.-K. Kwok. *Mathematical Models of Financial Derivatives.* Springer, Second Edition, lk 1-5, 99-126, 313-316, 337-340, 2008.

[10] D. B. Nelson, K. Ramaswamy. *Simple Binomial Process as Diffusion Approximation in Financial Models.* The Review of Financial Studies, Vol. 3 (3), lk 393-430, 1990.

[11] T. Raus. *Sissejuhatus finantsmatemaatikasse.* Tartu Ülikool, lk 78-89, 2019.

[12] T. Raus, O. Karma. *Lecture notes of Model of Financial Markets*. Tartu Ülikool, 2019.

[13] M. Rubinstein. *Implied Binomial Trees.* Journal of Finance, Vol. 49 (3), lk 774-775, 1994.

Lisad

Programmideks on kasutatud Pythonit ning pakke numpy (np) ning pakist scipy funktsiooni stats.

```
import numpy as np
from scipy import stats
```

Funktsiooni parameetrite selgitus. type – optsiooniliik ("c"=call, "p"=put), type2 – optsioonitüüp („a" – Ameerika, „e" – Euroopa), S0 või S – alusvara väärtus optsiooni alguses, E – täitmishind, T – täitmisaeg, r – riskivaba intress, sigma – volatiilsuse parameeter, beta – CEV mudeli β, time_steps – veergude arv ehk $N-1$.

Lisa 1. Euroopa optsiooni hinna arvutamine CCS meetodiga

```
def CCSarvuta(type='p',S=1,E=1,T=1,r=0.05,sigma=0.2,beta=1,time_steps=365):
    delta_t=T/(time_steps-1)
    # Valem (35)
    S23=S*(np.exp(sigma*S**(beta/2-1)*np.sqrt(delta_t)))
    # Loome binoomtabeli
    # Binoomtabelis liigub aeg vasakult paremale ja alusvara väärtused
kahanevad ülalt-alla
    # Kõige esimene väärtus on tabeli vasakpoolseima veeru keskel
    Stock_prices=np.zeros((time_steps*2-1,time_steps))
    # Täidame ära esimesed kaks rida (esimesed kaks aega)
    Stock_prices[time_steps-1,0]=S
    Stock_prices[time_steps-1,1]=S
    Stock_prices[time_steps-2,1]=S23
    Stock_prices[time_steps,1]=S-(sigma**2*S**beta*delta_t)/(S23-S)
    # Tsükkel ülejäänud alusvarade arvutamiseks
    for i in np.arange(2,time_steps):
        # Kopeerib järgmisele veerule eelmise veeru
        Stock_prices[:,i]=Stock_prices[:,i-1]
        # Võtab arvutamiseks kaks kõige alumist väärtust
        # Middle ehk eelneva veeru kõige alumine
        middle=Stock_prices[time_steps+i-2,i]
        # Upper ehk eelneva veeru eelviimane
        upper=Stock_prices[time_steps+i-3,i]
        # Arvutab uue veeru kõige alumise, asendab 0-ga kui väärtud tuleb
negatiivne
        if (upper-middle)!=0:
```

```
            alumine=middle-(sigma**2*np.abs(middle)**beta*delta_t)/(upper-
middle)
        else:
            alumine=0
        Stock_prices[time_steps+i-1,i]=alumine
        # Middle ehk eelneva veeru kõige ülemine
        middle=Stock_prices[time_steps-i,i]
        # Lower ehk eelneva veeru teine
        lower=Stock_prices[time_steps-i+1,i]
        # Arvutab uue veeru kõige ülemise väärtuse
        Stock_prices[time_steps-i-
1,i]=(sigma**2*np.abs(middle)**beta*delta_t)/(middle-lower)+middle

    # Optsiooni hindade arvutamine
    # t=T
    Option_prices=np.copy(Stock_prices)
    if type=="c":
        Option_prices[:,-1]=np.maximum(0,Stock_prices[:,-1]-E)
    elif type=="p":
        Option_prices[:,-1]=np.maximum(0,E-Stock_prices[:,-1])
    # Liigume hinnapuus ajas tagasi, rakendame valemit (21)
    for i in np.arange(2,time_steps+1):
        # Tõenäosus valemiga (38)

p=np.exp(r*delta_t)/(1+r*delta_t)*(1/2*r*np.sqrt(delta_t)*np.abs(Stock_prices
[:,-i+1])**(1-beta/2)/sigma+1/2)
        Option_prices[1:-1,-i]=np.exp(-r*delta_t)*(p[1:-1]*Option_prices[0:-
2,-i+1]+(1-p[1:-1])*Option_prices[2:,-i+1])
    # Optsiooni hind
    V=Option_prices[time_steps-1,0]
    return(V)
```

Lisa 2. Euroopa ning Ameerika optsiooni hinna arvutamine N-R meetodiga

```
# Funktsioon (26)
def X(s, sigma, gamma):
    return (s**(1-gamma)/(sigma*(1-gamma)))

# Funktsioon (27)
def S(x, sigma, gamma):
    if x>0:
        s=(sigma*(1-gamma)*x)**(1/(1-gamma))
```

```
    else:
        s=0
    return s

# Ju funktsioon valemist (28)
def Jp(x,k, sigma, h, r):
    j=1
    while j<10**6:
        if ((4*h*k*r)/(sigma**2)+x**2*(1-k*h))<((x+j*np.sqrt(h))**2):
            return j
        j=j+2
    j=0
    return j

# Jd funktsioon valemit (29)
def Jm(x,k, sigma, h, r):
    j=1
    while j<10**6:
        if (((4*h*k*r)/(sigma**2)+x**2*(1-k*h))>=((x-j*np.sqrt(h))**2)) or
((x-j*np.sqrt(h))>=0):
            return j
        j=j+2
    j=0
    return j

# Vahefunktsioon valemiks (28)
def Sp(x,k, sigma, h, r, gamma):
    return S(x+Jp(x,k, sigma, h, r)*np.sqrt(h), sigma, gamma)

# Vahefunktsioon valemiks (29)
def Sm(x,k, sigma, h, r, gamma):
    return S(x-Jm(x,k, sigma, h, r)*np.sqrt(h), sigma, gamma)

def NRarvuta(type="c", type2="e", S0=1, E=1, T=1/4, r=0.05, sigma=0.2,
beta=1, time_steps=400):
    # gamma N-R artiklist
    gamma=beta/2
    n=time_steps
    h=T/(n-1)
    # Tabeli loomine alusvara hindadeks
    Stock_prices=np.zeros((n*2-1,n))
    # Tabeli täitmine valemitega (28) ja (29)
    Stock_prices[n-1,0]=S0
```

```
    for k in np.arange(1,n):
        Stock_prices[:,k]=Stock_prices[:,k-1]
        Stock_prices[n-1-k,k]=Sp(X(Stock_prices[n-1-k+1,k-1], sigma, gamma),
k, sigma, h, r, gamma)
        Stock_prices[n-1+k,k]=Sm(X(Stock_prices[n-1+k-1,k-1], sigma, gamma),
k, sigma, h, r, gamma)
    # Tabeli loomine optsiooni hindadeks
    Option_prices=np.copy(Stock_prices)
    # Arvutusel t=T
    if type=="c":
        Option_prices[:,-1]=np.maximum(0,Stock_prices[:,-1]-E)
    elif type=="p":
        Option_prices[:,-1]=np.maximum(0,E-Stock_prices[:,-1])
    # Euroopa optsiooni puhul valemi (21) rakendamine
    if type2=="e":
        for i in np.arange(2,time_steps+1):
            p=prob(Stock_prices[:,-i],Stock_prices[:,-i+1],h,r)
            Option_prices[1:-1,-i]=np.exp(-r*h)*(p*Option_prices[0:-2,-
i+1]+(1-p)*Option_prices[2:,-i+1])
    # Ameerika optsiooni puhul valemi (22) rakendamine sõltuvalt
optsiooniliigist
    elif type2=="a" and type=="c":
        for i in np.arange(2,time_steps+1):
            p=prob(Stock_prices[:,-i],Stock_prices[:,-i+1],h,r)
            Option_prices[1:-1,-i]=np.maximum(np.maximum(0,Stock_prices[1:-
1,-i]-E),np.exp(-r*h)*(p*Option_prices[0:-2,-i+1]+(1-p)*Option_prices[2:,-
i+1]))
    elif type2=="a" and type=="p":
        for i in np.arange(2,time_steps+1):
            p=prob(Stock_prices[:,-i],Stock_prices[:,-i+1],h,r)
            Option_prices[1:-1,-i]=np.maximum(np.maximum(0,E-Stock_prices[1:-
1,-i]),np.exp(-r*h)*(p*Option_prices[0:-2,-i+1]+(1-p)*Option_prices[2:,-
i+1]))
    # Optsiooni hind ajahetkel t=0
    V=Option_prices[time_steps-1,0]
    return(V)

# Tõenäosuse funktsioon valemist  (30)
def prob(Sp,Sn,h,r):
    s=Sp[1:-1]
    sp=Sn[0:-2]
    sm=Sn[2:]
    d=sp-sm
```

```
    prob=np.zeros(np.shape(s))
    for i in np.arange(0,len(d)):
        if d[i]!=0:
            prob[i]=(h*r*s[i]+s[i]-sm[i])/d[i]
    return(prob)
```

Lisa 3. Euroopa optsiooni hinna arvutamine analüütilise valemiga

```
def Anarvuta(type="c", S0=1, E=1, T=1/4, r=0.05, sigma=0.2, beta=1):
    if beta<2:
        alpha=beta/2
        omega=sigma**2/(2*r*(alpha-1))*(np.exp(2*r*(alpha-1)*T)-1)
        a=(E*np.exp(-r*T))**(2*(1-alpha))/((1-alpha)**2*omega)
        b=1/(1-alpha)
        c=S0**(2*(1-alpha))/((1-alpha)**2*omega)
        if type=="c":
            AnEuropeOpt=S0*(1-stats.ncx2.cdf(a,df=(b+2),nc=c))-E*np.exp(-
r*T)*stats.ncx2.cdf(c,df=b,nc=a)
        elif type=="p":
            AnEuropeOpt=E*np.exp(-r*T)*(1-stats.ncx2.cdf(c,df=b,nc=a))-
S0*stats.ncx2.cdf(a,df=(b+2),nc=c)
    elif beta==2:
        d1=(np.log(S0/E)+(r+sigma**2/2)*T)/(sigma*np.sqrt(T))
        d2=d1-sigma*np.sqrt(T)
        if type=="c":
            AnEuropeOpt=S0*stats.norm.cdf(d1)-E*np.exp(-
r*T)*stats.norm.cdf(d2)
        elif type=="p":
            AnEuropeOpt=E*np.exp(-r*T)*(1-stats.norm.cdf(d2))-S0*(1-
stats.norm.cdf(d1))
    return(AnEuropeOpt)
```

Lisa 4. Euroopa optsioonide hinna arvutamine CRR meetodil

```
def CRRarvuta(type="c", type2="e", S0=1, E=1, T=1/4, r=0.05, sigma=0.2,
time_steps=365):
    n=time_steps
    h=T/(n-1)
    Stock_prices=np.zeros((n*2-1,n))
    Stock_prices[n-1,0]=S0
    for k in np.arange(1,n):
        Stock_prices[:,k]=Stock_prices[:,k-1]
```

```
        Stock_prices[n-1-k,k]=Stock_prices[n-k,k]*np.exp(sigma*np.sqrt(h))
        Stock_prices[n-1+k,k]=Stock_prices[n-2+k,k]*np.exp(-sigma*np.sqrt(h))
    Option_prices=np.copy(Stock_prices)
    if type=="c":
        Option_prices[:,-1]=np.maximum(0,Stock_prices[:,-1]-E)
    elif type=="p":
        Option_prices[:,-1]=np.maximum(0,E-Stock_prices[:,-1])
    if type2=="e":
        for i in np.arange(2,time_steps+1):
            p=prob(Stock_prices[:,-i],Stock_prices[:,-i+1],h,r)
            Option_prices[1:-1,-i]=np.exp(-r*h)*(p*Option_prices[0:-2,-
i+1]+(1-p)*Option_prices[2:,-i+1])
    elif type2=="a" and type=="c":
        for i in np.arange(2,time_steps+1):
            p=prob(Stock_prices[:,-i],Stock_prices[:,-i+1],h,r)
            Option_prices[1:-1,-i]=np.maximum(np.maximum(0,Stock_prices[1:-
1,-i]-E),np.exp(-r*h)*(p*Option_prices[0:-2,-i+1]+(1-p)*Option_prices[2:,-
i+1]))
    elif type2=="a" and type=="p":
        for i in np.arange(2,time_steps+1):
            p=prob(Stock_prices[:,-i],Stock_prices[:,-i+1],h,r)
            esim=np.maximum(0,E-Stock_prices[1:-1,-i])
            Option_prices[1:-1,-i]=np.maximum(esim,np.exp(-
r*h)*(p*Option_prices[0:-2,-i+1]+(1-p)*Option_prices[2:,-i+1]))
    V=Option_prices[time_steps-1,0]
    return(V)

def prob(Sp,Sn,h,r):
    s=Sp[1:-1]
    sp=Sn[0:-2]
    sm=Sn[2:]
    d=sp-sm
    prob=np.zeros(np.shape(s))
    for i in np.arange(0,len(d)):
        if d[i]!=0:
            prob[i]=(np.exp(h*r)*s[i]-sm[i])/d[i]
    return(prob)
```

Lisa 5. Euroopa ja Ameerika optsioonide hinna arvutamine CCS meetodi I modifikatsiooniga

```
def mod1arvuta(type="c",type2="e",
S=100,E=100,T=1,r=0.05,sigma=3,beta=0.5,time_steps=252):
    delta_t=T/(time_steps-1)
    # Valem (35)
    S23=S*(np.exp(sigma*S**(beta/2-1)*np.sqrt(delta_t)))
    # Loome binoomtabeli
    # Binoomtabelis liigub aeg vasakult paremale ja alusvara väärtused
kahanevad ülalt-alla
    # Kõige esimene väärtus on tabeli vasakpoolseima veeru keskel
    Stock_prices=np.zeros((time_steps*2-1,time_steps))
    # Täidame ära esimesed kaks rida (esimesed kaks aega)
    Stock_prices[time_steps-1,0]=S
    Stock_prices[time_steps-1,1]=S
    Stock_prices[time_steps-2,1]=S23
    Stock_prices[time_steps,1]=S-(sigma**2*S**beta*delta_t)/(S23-S)
    # Tsükkel ülejäänud alusvarade arvutamiseks
    for i in np.arange(2,time_steps):
        # Kopeerib järgmisele veerule eelmise veeru
        Stock_prices[:,i]=Stock_prices[:,i-1]
        # Võtab arvutamiseks kaks kõige alumist väärtust
        # Middle ehk eelneva veeru kõige alumine
        middle=Stock_prices[time_steps+i-2,i]
        # Upper ehk eelneva veeru eelviimane
        upper=Stock_prices[time_steps+i-3,i]
        # Arvutab uue veeru kõige alumise, asendab 0-ga kui väärtud tuleb
negatiivne
        if (upper-middle)!=0:
            alumine=middle-(sigma**2*np.abs(middle)**beta*delta_t)/(upper-
middle)
        else:
            alumine=0
        Stock_prices[time_steps+i-1,i]=alumine*(alumine>0)
        # Middle ehk eelneva veeru kõige ülemine
        middle=Stock_prices[time_steps-i,i]
        # Lower ehk eelneva veeru teine
        lower=Stock_prices[time_steps-i+1,i]
        # Arvutab uue veeru kõige ülemise väärtuse
        Stock_prices[time_steps-i-
1,i]=(sigma**2*np.abs(middle)**beta*delta_t)/(middle-lower)+middle
    # Tõenäosuste arvutamine I modifikatsiooniga
```

```
    def prob(S):
        dS=S[0:-1]-S[1:]
        prob=np.zeros(np.shape(S[1:-1]))
        for i in np.arange(0,len(prob)):
            if dS[i]+dS[i+1]!=0 and dS[i]!=0:

prob[i]=np.exp(r*delta_t)/(1+r*delta_t)*((r*S[i+1]*delta_t)/(dS[i]+dS[i+1])+(
sigma**2*S[i+1]**beta*delta_t)/((dS[i]+dS[i+1])*dS[i]))
        return(prob)
    # Tabeli loomine optsiooni hindadeks
    Option_prices=np.copy(Stock_prices)
    # Arvutusel t=T
    if type=="c":
        Option_prices[:,-1]=np.maximum(0,Stock_prices[:,-1]-E)
    elif type=="p":
        Option_prices[:,-1]=np.maximum(0,E-Stock_prices[:,-1])
    # Euroopa optsiooni puhul valemi (21) rakendamine
    if type2=="e":
        for i in np.arange(2,time_steps+1):
            p=prob(Stock_prices[:,-i+1])
            Option_prices[1:-1,-i]=np.exp(-r*delta_t)*(p*Option_prices[0:-2,-
i+1]+(1-p)*Option_prices[2:,-i+1])
    # Ameerika optsiooni puhul valemi (22) rakendamine sõltuvalt
optsiooniliigist
    elif type2=="a" and type=="c":
        for i in np.arange(2,time_steps+1):
            p=prob(Stock_prices[:,-i+1])
            Option_prices[1:-1,-i]=np.maximum(np.maximum(0,Stock_prices[1:-
1,-i]-E),np.exp(-r*delta_t)*(p*Option_prices[0:-2,-i+1]+(1-
p)*Option_prices[2:,-i+1]))
    elif type2=="a" and type=="p":
        for i in np.arange(2,time_steps+1):
            p=prob(Stock_prices[:,-i+1])
            Option_prices[1:-1,-i]=np.maximum(np.maximum(0,E-Stock_prices[1:-
1,-i]),np.exp(-r*delta_t)*(p*Option_prices[0:-2,-i+1]+(1-
p)*Option_prices[2:,-i+1]))
    # Optsiooni hind ajahetkel t=0
    V=Option_prices[time_steps-1,0]
    return(V)
```

Lisa 6. Euroopa ja Ameerika optsioonide hinna arvutamine CCS meetodi II modifikatsiooniga

```
def
mod2arvuta(type="c",type2="e",S=100,E=100,T=1,r=0.05,sigma=3,beta=0.5,time_st
eps=252):
    delta_t=T/(time_steps-1)
    # Valem (35)
    S23=S*(np.exp(sigma*S**(beta/2-1)*np.sqrt(delta_t)))
    # Loome binoomtabeli
    # Binoomtabelis liigub aeg vasakult paremale ja alusvara väärtused
kahanevad ülalt-alla
    # Kõige esimene väärtus on tabeli vasakpoolseima veeru keskel
    Stock_prices=np.zeros((time_steps*2-1,time_steps))
    # Täidame ära esimesed kaks rida (esimesed kaks aega)
    Stock_prices[time_steps-1,0]=S
    Stock_prices[time_steps-1,1]=S
    Stock_prices[time_steps-2,1]=S23
    Stock_prices[time_steps,1]=S-(sigma**2*S**beta*delta_t)/(S23-S)
    # Tsükkel ülejäänud alusvarade arvutamiseks
    for i in np.arange(2,time_steps):
        # Kopeerib järgmisele veerule eelmise veeru
        Stock_prices[:,i]=Stock_prices[:,i-1]
        # Võtab arvutamiseks kaks kõige alumist väärtust
        # Middle ehk eelneva veeru kõige alumine
        middle=Stock_prices[time_steps+i-2,i]
        # Upper ehk eelneva veeru eelviimane
        upper=Stock_prices[time_steps+i-3,i]
        # Arvutab uue veeru kõige alumise, asendab 0-ga kui väärtud tuleb
negatiivne
        if (upper-middle)!=0:
            alumine=middle-(sigma**2*np.abs(middle)**beta*delta_t)/(upper-
middle)
        else:
            alumine=0
        Stock_prices[time_steps+i-1,i]=alumine*(alumine>0)
        # Middle ehk eelneva veeru kõige ülemine
        middle=Stock_prices[time_steps-i,i]
        # Lower ehk eelneva veeru teine
        lower=Stock_prices[time_steps-i+1,i]
        # Arvutab uue veeru kõige ülemise väärtuse
        Stock_prices[time_steps-i-
1,i]=(sigma**2*np.abs(middle)**beta*delta_t)/(middle-lower)+middle
```

```
    # Tõenäosuste arvutamine II modifikatsiooniga
    def prob(S):
        s=S[1:-1]
        sp=S[0:-2]
        sm=S[2:]
        d=sp-sm
        prob=np.zeros(np.shape(s))
        for i in np.arange(0,len(d)):
            if s[i]!=0:
                prob[i]=(np.exp(r*delta_t)-sm[i]/s[i])/(sp[i]/s[i]-
sm[i]/s[i])
        return(prob)
    # Tabeli loomine optsiooni hindadeks
    Option_prices=np.copy(Stock_prices)
    # Arvutusel t=T
    if type=="c":
        Option_prices[:,-1]=np.maximum(0,Stock_prices[:,-1]-E)
    elif type=="p":
        Option_prices[:,-1]=np.maximum(0,E-Stock_prices[:,-1])
    # Euroopa optsiooni puhul valemi (21) rakendamine
    if type2=="e":
        for i in np.arange(2,time_steps+1):
            p=prob(Stock_prices[:,-i+1])
            Option_prices[1:-1,-i]=np.exp(-r*delta_t)*(p*Option_prices[0:-2,-
i+1]+(1-p)*Option_prices[2:,-i+1])
    # Ameerika optsiooni puhul valemi (22) rakendamine sõltuvalt
optsiooniliigist
    elif type2=="a" and type=="c":
        for i in np.arange(2,time_steps+1):
            p=prob(Stock_prices[:,-i+1])
            Option_prices[1:-1,-i]=np.maximum(np.maximum(0,Stock_prices[1:-
1,-i]-E),np.exp(-r*delta_t)*(p*Option_prices[0:-2,-i+1]+(1-
p)*Option_prices[2:,-i+1]))
    elif type2=="a" and type=="p":
        for i in np.arange(2,time_steps+1):
            p=prob(Stock_prices[:,-i+1])
            Option_prices[1:-1,-i]=np.maximum(np.maximum(0,E-Stock_prices[1:-
1,-i]),np.exp(-r*delta_t)*(p*Option_prices[0:-2,-i+1]+(1-
p)*Option_prices[2:,-i+1]))
    # Optsiooni hind ajahetkel t=0
    V=Option_prices[time_steps-1,0]
    return(V)
```

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Risto Korb,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose "Optsioonide hindamine binoommeetodiga konstantse elastsusega dispersiooni korral", mille juhendaja on Toomas Raus, reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.

2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commonsi litsentsiga CC BY NC ND 3.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.

3. Olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

4. Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Risto Korb

18.08.2020